Présentations

Cours

Sébastien Thibaud

Présentations

S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Objectifs pédagogiques

- Vous donner les outils nécessaires à la résolution de problèmes de physique/chimie et plus généralement scientifique
- Donner une méthodologie pour résoudre ces problèmes

Objectifs souhaités (un doux rêve ?)

- Rendre l'étudiant curieux (un scientifique est une personne curieuse)
- Donner les bases pour une éventuelle poursuite d'étude (ce qui est souvent le cas)
- Dépoussiérer les idées préconçues sur les mathématiques

Pour le prochain TD de Maths

- Que pensez-vous des enseignements de maths jusqu'à présent ?
- Que pensez-vous généralement des maths ?
- Qu'attendez-vous des maths lors de votre cursus universitaire ?
- Qu'attendez-vous de votre enseignant ?

Présentation du programme de maths de DUT en fonction des enseignements scientifiques

Fonctions numériques à une variable réelle/plusieurs variables réelles

Physique, Chimie, Thermodynamique, mécanique des fluides …

Calcul différentiel et intégral

Toutes disciplines scientifiques

Physique, Chimie, Thermo, SdM…

Calcul matriciel

Résolutions d'équations

Chimiométrie

Série de Fourier

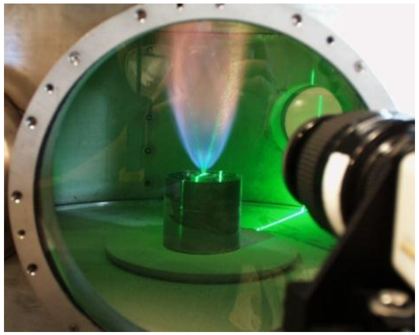
Physique

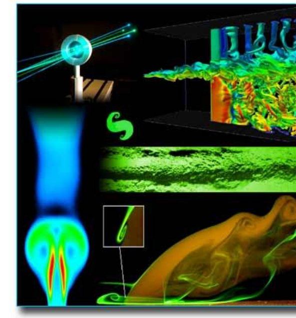
Probabilités et statistiques

Physique, Chimie, Expérimentations, Chimiométrie

Nombres complexes

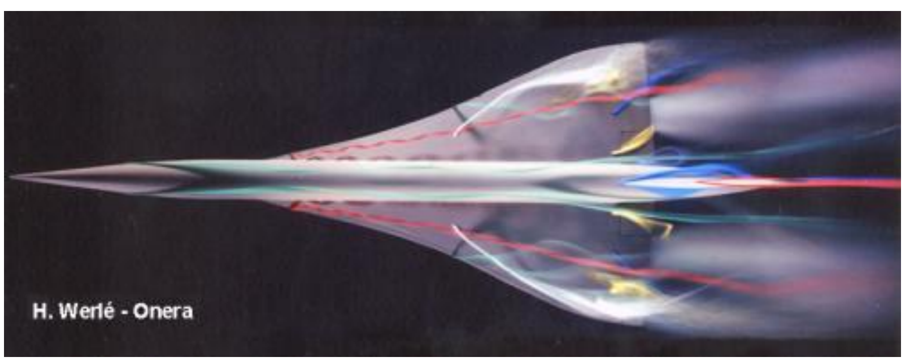
Physique

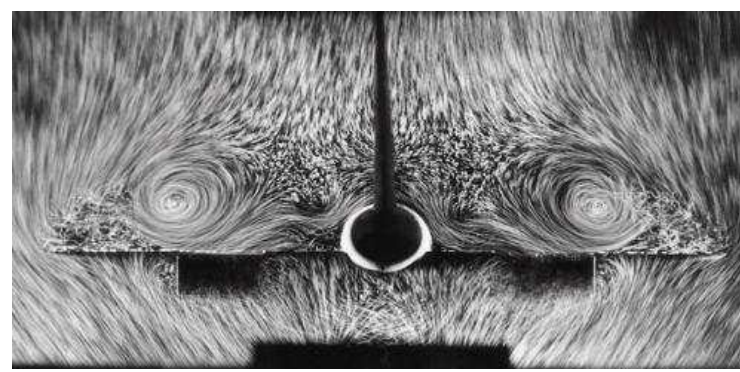




Fonctions numériques de variable réelle

(Fonctions réelles à valeurs réelles)

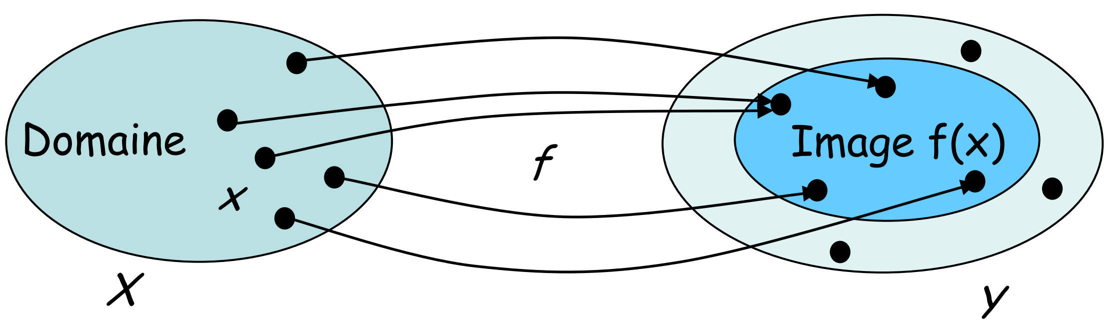




• Les diverses applications scientifiques tentent de chercher des relations entre différentes variables considérées.

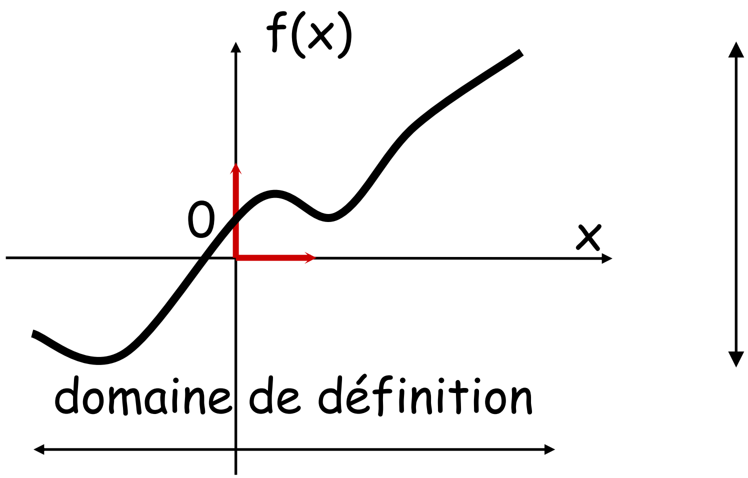
• Ces diverses relations font intervenir la notion de fonction

Une **fonction** f est une relation qui à chaque élément x d'un ensemble X associe un **élément unique** y d'un ensemble Y. L'élément y est appelé **élément image** de x par la fonction f et on le note $f(x)$ (lire « f de x »). L'ensemble X est appelé **domaine** de f et l'ensemble de tous les éléments images des éléments de X est appelé **image** de la fonction.



S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Domaine de définition – Courbe représentative (préambule)



Domaine de valeurs

$$f : D \subset R \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow f(x)$$

- Sauf indication contraire, le domaine d'une fonction est l'ensemble des nombres réels pour lesquels la fonction est définie
- Si une fonction f est **indéfinie** en x, cela signifie que x n'appartient pas au domaine de f

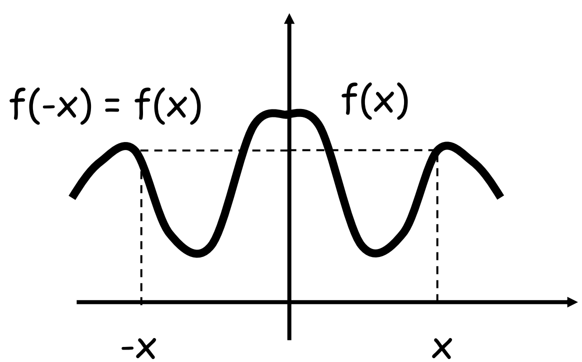
Notation des Fonctions

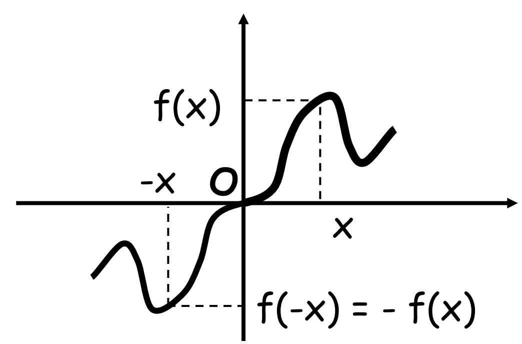
- On peut représenter les fonctions de diverses façons
- Généralement une formule mathématique
- Il est courant (mais pas essentiel), de désigner par x la variable d'entrée et par y la variable de sortie associée
- On écrit alors la relation reliant x et y
- Dans ce cas, x et y sont appelées variables (x: variable indépendante et y: variable dépendante)

- **Fonction surjective** : Si l'image de *f* comprend tous les éléments de *Y (ex: fonction sinus)*
- **Fonction bijective** : Si pour un élément *x* du domaine, il existe une unique image *y* et réciproquement (fonction linéaire : y=ax+b)
- **Fonction bornée** : une fonction *f* est dite **bornée** sur [a,b] s'il existe un nombre B tel que $|f(x)| \leq B$

Pour tout $x \in [a,b]$ (exemple la fonction sinus et cosinus sont bornées sur R (M=1)

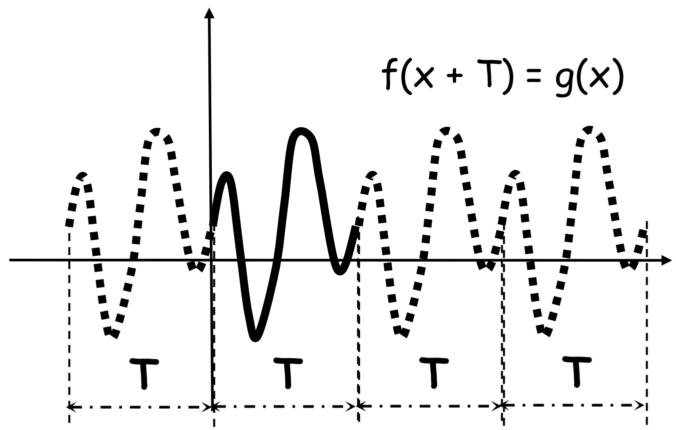
- **Fonction paire** : une fonction *f* est dite paire sur E si pour tout $x \in E$: f(x)=f(-x) (ex: cos x)
- **Fonction impaire** : une fonction *f* est dite impaire sur E si pour tout $x \in E$: f(x)=-f(x) (ex: sin x)





- **Fonction périodique** : une fonction f est dite périodique sur E si pour tout $x \in E$ et $x + T \in E$ f(x+T)=f(x) (ex: cos(x) et sin(x), la période est 2π)

• **Fonction périodique** : une fonction f est dite périodique sur E si pour tout $x \in E$ et $x+T \in E$ f(x+T)=f(x) (le plus petit T est appelé période, ex: cos(x) et sin(x), la période est 2π)



S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Opérations sur les fonctions

- Égalité entre deux fonctions

$$f : D \subset R \longrightarrow R \qquad\qquad g : D \subset R \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow f(x) \qquad\qquad x \longrightarrow g(x)$$

les fonctions f et g sont égales, $\Leftrightarrow$ f et g ont même domaine de définition D et si pour tout $x \in D$ on a $f(x) = g(x)$

et on écrit $f = g$

Égalité de fonctions

Égalité de réels

Opérations sur les fonctions : somme de 2 fonctions

- Somme de deux fonctions

$$f : D \subset R \longrightarrow R \qquad\qquad g : D \subset R \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow f(x) \qquad\qquad x \longrightarrow g(x)$$

- La somme de deux fonctions s'écrit : $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

Opérations sur les fonctions : Multiplication par un réel (scalaire)

- Si $\lambda \in R$: $(\lambda.g)(x)=\lambda.g(x)$

Opérations sur les fonctions : Composition de deux fonctions

• Il arrive souvent qu'une grandeur soit donnée par une fonction d'une variable qui à son tour peut s'écrire comme une fonction d'une seconde variable.

• Prenons, par exemple, le cas de la société AMAZON : Elle doit expédier x paquets (DVD, Livres, CD) à différentes adresses.

• Soit x, le nombre de paquets à expédier. F le poids de ces x objets et g, le coût total de l'envoi.

• Dans ce cas :

- Le poids est une fonction que l'on notera $f(x)$ du nombre d'objets x
- Le coût est une fonction $g[f(x)]$ du poids

• Le coût devient alors une fonction du nombre de paquets.

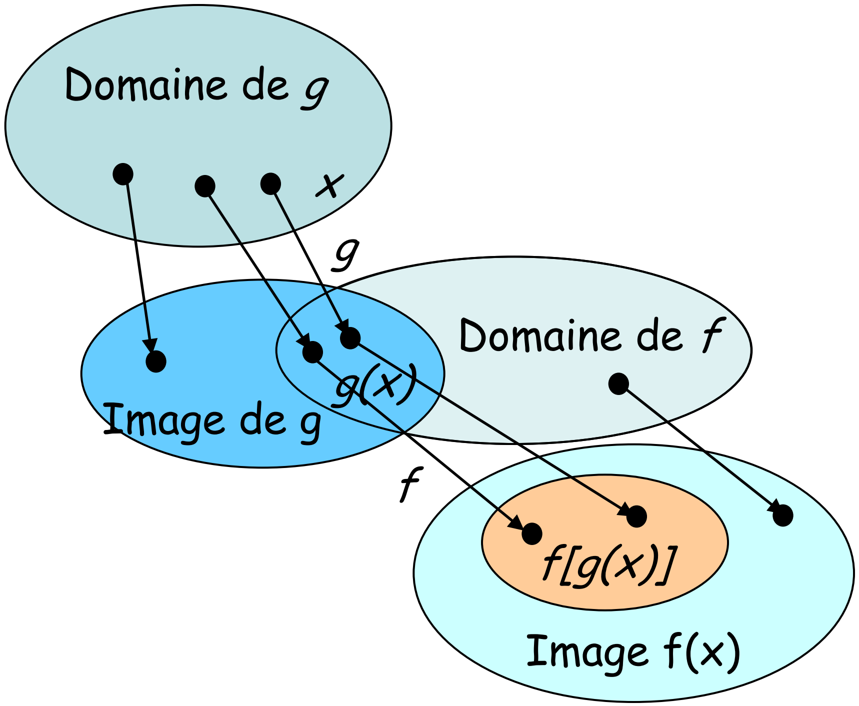
• Ce processus consiste à évaluer une fonction de fonction. On appelle cette opération la **composition de fonctions**.

Opérations sur les fonctions : Composition de deux fonctions

La **fonction composée** notée $f \circ g$ est définie par $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ (lire « f de [g de x] »).

Pour chaque x appartenant au domaine de g pour lequel $g(x)$ appartient au domaine de f.

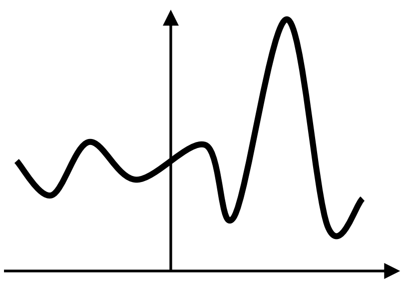
En général $f \circ g \neq g \circ f$



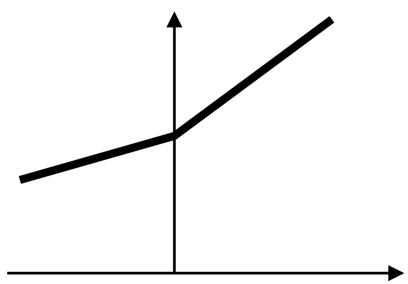
Continuité

• Lorsque l'on trace le graphe associé à une fonction, on place un nombre fini de points et on les joints en supposant que la fonction varie régulièrement

• Cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée (même lorsque la fonction est définie par une formule)

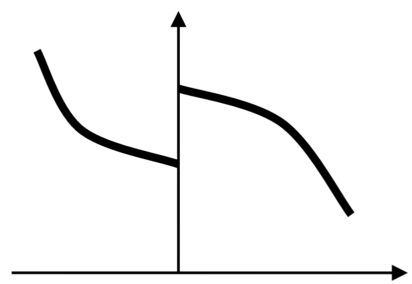


Rien de particulier

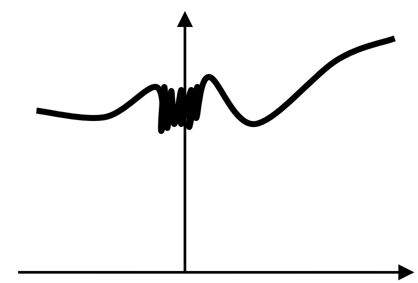


Changement de pente mais valeur unique de la fonction à l'origine

Les Fonctions varient de façon continue



Changement brutal de la fonction à l'origine et deux valeurs distinctes de la fonction



La fonction oscille indéfiniment au voisinage de l'origine sans même que l'on sache sa valeur en 0

Les Fonctions varient de façon discontinue

Continuité

Une **fonction numérique** f, définie sur un intervalle I de **R**, est **continue** en un point x_0 de I si :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ existe } \textbf{et} \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- On dit que la fonction f est **continue à droite** si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

- On dit que la fonction f est **continue à gauche** si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

- On dit qu'une fonction f est **continue** sur le segment **[a,b]**, si la fonction f est continue en tout point de **]a,b[**, à **gauche** en **a** et à **droite** en **b**

- La somme, le produit, le quotient, la composée de deux fonctions continues sont des fonctions continues

Continuité – Mise en garde

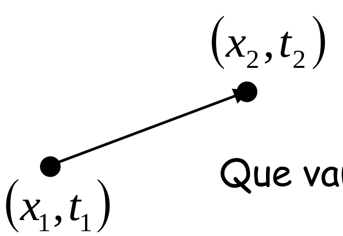
Dans le cas particulier d'un quotient, les points où le dénominateur s'annule ne font pas partie du domaine de définition, et le quotient est continu sur des intervalles (ouverts) qui ne contiennent pas ces points. (sauf cas particuliers des formes indéterminées, voir TD 1 sur le prolongement par continuité de fractions rationnelles)

Calcul des limites

Calcul pratique des limites

• Il est souvent nécessaire de connaître le comportement d'une fonction en certains points qui « posent » problème. Le but est de donner ici les outils nécessaires aux calculs des limites.

• Il faut savoir que la notion de limite fut une avancée considérable en mathématiques et donc en physique car elle mène à la définition de la dérivée et donc au calcul différentiel et intégral.



La vitesse moyenne d'une particule est donnée par $\bar{v} = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$

Que vaut alors la limite de la vitesse moyenne lorsque les deux instants sont très proches ?

$$\lim_{t_1 \to t_2} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = ? \qquad \lim_{t_1 \to t_2} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = v_{inst}$$

Propriétés des limites

- **Règle de la fonction constante :** $\lim_{x \to c} k = k$ si k est une constante
- **Règle de la fonction f(x)=x :** $\lim_{x \to c} x = c$
- **Règle de la multiplication par une constante :** $\lim_{x \to c} [kf(x)] = k \lim_{x \to c} f(x)$
- **Règle de la somme :** $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$
- **Règle de la différence :** $\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$
- **Règle du produit :** $\lim_{x \to c} [f(x) g(x)] = \left(\lim_{x \to c} f(x)\right)\left(\lim_{x \to c} g(x)\right)$
- **Règle du quotient :** $\lim_{x \to c} [f(x) / g(x)] = \left(\lim_{x \to c} f(x)\right) / \left(\lim_{x \to c} g(x)\right)$ si $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$
- **Règle des puissances :** $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = \left(\lim_{x \to c} f(x)\right)^n$ où n est un nombre rationnel

S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Limite d'une fonction polynomiale

Si ***P*** est une fonction polynomiale alors $\lim_{x \to c} P(x) = P(c)$

Limite d'une fraction rationnelle

Si ***Q*** est une fonction rationnelle définie par $Q(x) = \dfrac{P(x)}{D(x)}$ alors $\lim_{x \to c} Q(x) = \dfrac{P(c)}{D(c)}$ si $D(c) \neq 0$

Évaluations algébrique des limites - Formes indéterminées et cas particuliers

Forme indéterminée 0/0

Évaluation d'une limite par la réduction de fraction

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+3)=5$$

Cette simplification est valide seulement si $x\neq 2$. On peut ici faire l'évaluation de la limite de la fonction réduite car on cherche la valeur de la fonction ***lorsque l'on s'approche de 2*** et non pas la valeur de la fonction en x=2.

Évaluation d'une limite par rationalisation

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}.\left[\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$$

Évaluations algébrique des limites - Formes indéterminées et cas particuliers

Forme indéterminée 0/0

Évaluation d'une limite en présence d'exponentielles

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+e^{x}-2}{e^{x}-1}$$

On pose X=e^x **et on n'oublie pas de changer la valeur où l'on recherche la limite** $x\to 0 \Leftrightarrow X\to 1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+e^{x}-2}{e^{x}-1}=\lim_{X\to 1}\frac{X^{2}+X-2}{X-1}=\lim_{X\to 1}\frac{(X-1)(X+2)}{(X-1)}=\lim_{X\to 1}(X+2)=3$$

Évaluation d'une limite d'un polynôme

$$\lim_{x\to 0}P(x)=\lim_{x\to 0}\left(a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0\right)\sim\lim_{x\to 0}a_0$$

La limite d'un polynôme lorsque ***x tend vers 0*** est équivalente à la limite lorsque ***x tend vers 0*** de son monôme de plus bas degré

$$\lim_{x\to 0}P(x)=\lim_{x\to 0}x^8-2x^3+x\sim\lim_{x\to 0}x=0$$

Évaluations algébrique des limites - Formes indéterminées et cas particuliers

Forme indéterminée 0/0, ∞/∞,∞-∞

Évaluation d'une limite d'une fraction rationnelle

$$\lim_{x\to 0} Q(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} \sim \lim_{x\to 0} \frac{a_0}{b_0}$$

La limite d'une fraction rationnelle lorsque ***x tend vers 0*** est équivalente à la limite lorsque ***x tend vers 0*** des rapports des monômes de plus bas degré

$$\lim_{x\to 0} Q(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-1}{x^2}\right) \sim \lim_{x\to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$$

Évaluations algébrique des limites - Formes indéterminées et cas particuliers

Forme indéterminée 0/0, ∞/∞,∞-∞

Évaluation d'une limite d'une fraction rationnelle

$$\lim_{x\to\infty} Q(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} \sim \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{a_m x^m}$$

La limite d'une fraction rationnelle lorsque ***x tend vers ∞*** est équivalente à la limite lorsque ***x tend vers ∞*** des rapports des monômes de plus haut degré

$$\lim_{x\to\infty} Q(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-1}{x^2+4}\right) \sim \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Évaluations algébrique des limites - Formes indéterminées et cas particuliers

Règle de la compression (ou d'encadrement)

Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ sur un intervalle ouvert contenant *c* et si

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$$

Alors $\lim_{x \to c} f(x) = L$

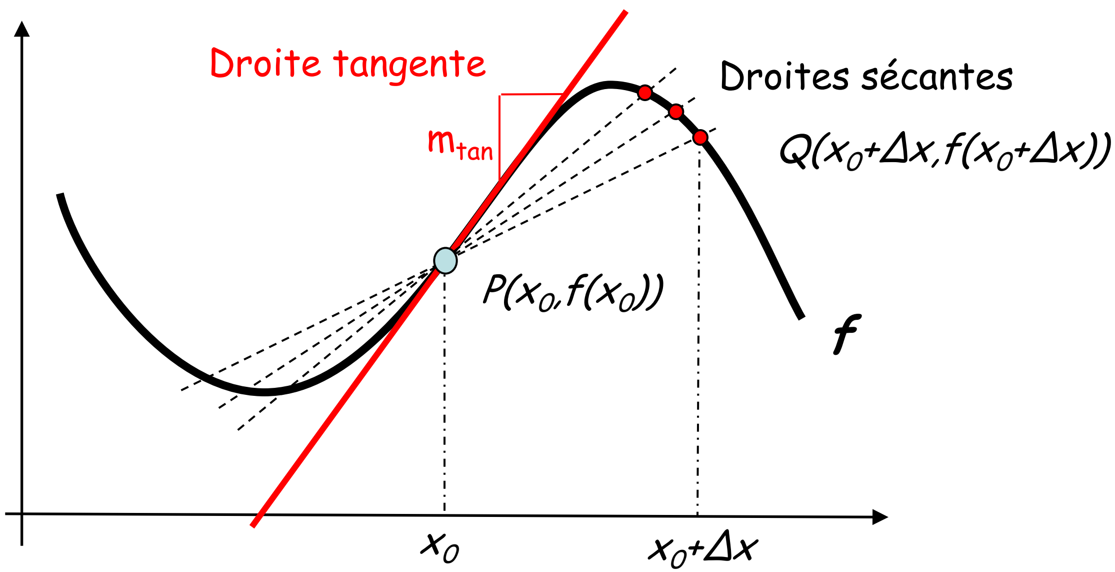
Si une fonction peut être comprimée (encadrée) entre deux fonctions ayant des limites égales en un point donné, alors cette fonction a nécessairement la même limite en ce point.

Notions sur les dérivées

• En préambule, on a présenté le calcul de limite comme étant un outil pour étudier le comportement particulier des fonctions en certains points.

• Nous allons ici présenter et introduire plus en détail le concept de dérivée associé

• La dérivée a déjà été introduite comme étant la **pente de la tangente** à la courbe représentative d'une fonction en un point



Pente d'une tangente à un graphe en un point

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Si elle existe

Δx est appelé accroissement

Définition de la dérivée

• La fonction $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ donne la pente d'une sécante du graphe d'une fonction *f* et est appelée **taux de variation moyen** de *f*.

• La limite de ce taux de variation moyen $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ donne la pente de la tangente au graphe de *f* au point (*x*,*f*(*x*)) et est appelée **taux de variation instantanée** ou ***dérivée*** de *f*.

Définition de la dérivée d'une fonction

La dérivée de *f* en *x* est donnée par (en utilisant les notations de Leibniz)

$$\frac{df}{dx}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

A condition que cette limite existe

• **Dériver** une fonction *f* en *x* signifie trouver sa dérivée au point (*x*,*f(x)*)

• Si la limite du taux de variation moyen existe, on dit que *f* est **dérivable** en x

• La dérivée d'une fonction est elle-même une fonction

Applications directes de la définition

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x - x)(x+\Delta x + x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x+\Delta x) = 2x$$

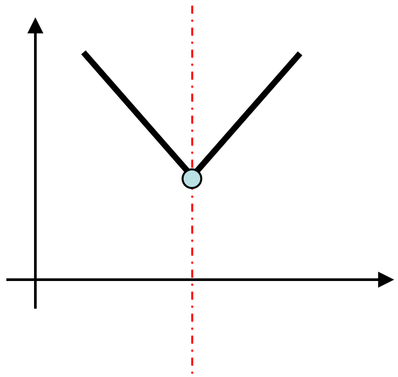
$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

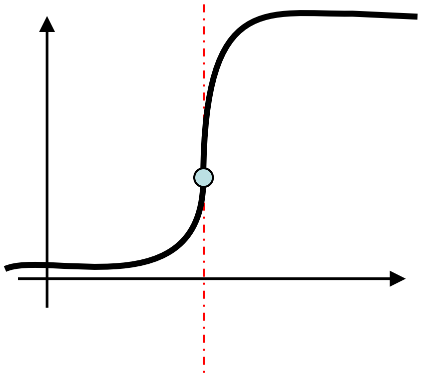
$$\sin(x+\Delta x) = \sin x \cos \Delta x + \sin \Delta x \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cos x + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} \sin x = \cos x$$

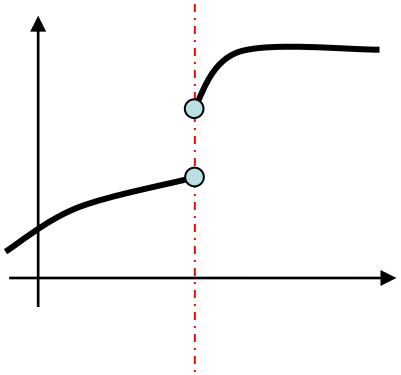
Existence des dérivées : cas courants où elle n'existe pas



Point anguleux



Tangente verticale



Point de discontinuité

Si les limites à gauche et à droite du taux de variation moyen ne sont pas égales lorsque x tend vers c, la fonction n'est pas dérivable en c.

Continuité et dérivabilité: Théorème

Si une fonction *f* est dérivable en *x=c*, alors elle est également continue en *x=c*

La réciproque n'est pas vrai : si une fonction est continue en *x=c*, elle peut être ou ne pas être dérivable en ce point. Exemple de la valeur absolue qui est continue est en 0 mais non dérivable en 0.

Notations de Leibniz

Le symbole $\dfrac{d}{dx}$ est le symbole de dérivation d'une fonction par rapport à *x*.

Cette notation possède l'avantage de définir la variable par rapport à laquelle on dérive

Les dérivées successives de *y=f(x)* sont alors données par

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}$$

Dérivée seconde

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d^3y}{dx^3}$$

Dérivée *3*-ième

$$\frac{d^ny}{dx^n}$$

Dérivée *n*-ième

Règles fondamentales de dérivation (à connaître sur le bout des doigts)

Règle de la dérivée d'une constante *y=k* $\frac{dy}{dx} = 0$

Règle de la multiplication par une constante *y=kf(x)* $\frac{dy}{dx} = k\frac{df}{dx}$

Règle de la somme *y=(f+g)(x)* $\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$

Règle de la différence *y=(f-g)(x)* $\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} - \frac{dg}{dx}$

Ces 4 règles peuvent être rassemblées en une seule la règle de linéarité y=af+bg

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{df}{dx} + b\frac{dg}{dx}$$

Règles fondamentales de dérivation (à connaître sur le bout des doigts)

Règle du produit ***y(x)=f(x)g(x)***

$$\frac{dy}{dx}=f\frac{dg}{dx}+g\frac{df}{dx}$$

Règle du quotient ***y(x)=f(x)/g(x)***

$$\frac{dy}{dx}=\frac{g\frac{df}{dx}-f\frac{dg}{dx}}{g^2}$$

Règle de dérivation en chaîne y=(fog)(x)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(f\left[g(x)\right]\right)=\frac{df}{dg}.\frac{dg}{dx}$$

On peut réécrire u=g(x)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(f\left[u\right]\right)=\frac{df}{du}.\frac{du}{dx}$$

Exemple $f(x)=x^n \qquad y=(fog)(x)=(g(x))^n$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(f\left[g\right]\right)=\frac{df}{dg}.\frac{dg}{dx}=ng^{n-1}.\frac{dg}{dx}=n\frac{dg}{dx}g^{n-1}$$

Dérivées usuelles

Dérivées des fonctions trigonométriques

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

Dérivées des fonctions puissances

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}$$

Dérivées des fonctions exponentielles et logarithmes

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x \qquad \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Dérivées usuelles généralisées – Utilisation de la dérivation en chaîne

Dérivées des fonctions trigonométriques $u = u(x)$

$$\frac{d}{dx}(\cos u(x)) = -\sin u(x)\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(\sin u(x)) = \cos u(x)\frac{du}{dx}$$

Dérivées des fonctions puissances

$$\frac{d}{dx}\left(u(x)^n\right) = nu(x)^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Dérivées des fonctions exponentielles et logarithmes

$$\frac{d}{dx}\left(e^{u(x)}\right) = \frac{du}{dx}e^{u(x)} \qquad \frac{d}{dx}(\ln u(x)) = \frac{1}{u(x)}\frac{du}{dx}$$

Exemple

Dérivée de la fonction

$$f(x) = \cos^4\left((3x+1)^2\right)$$

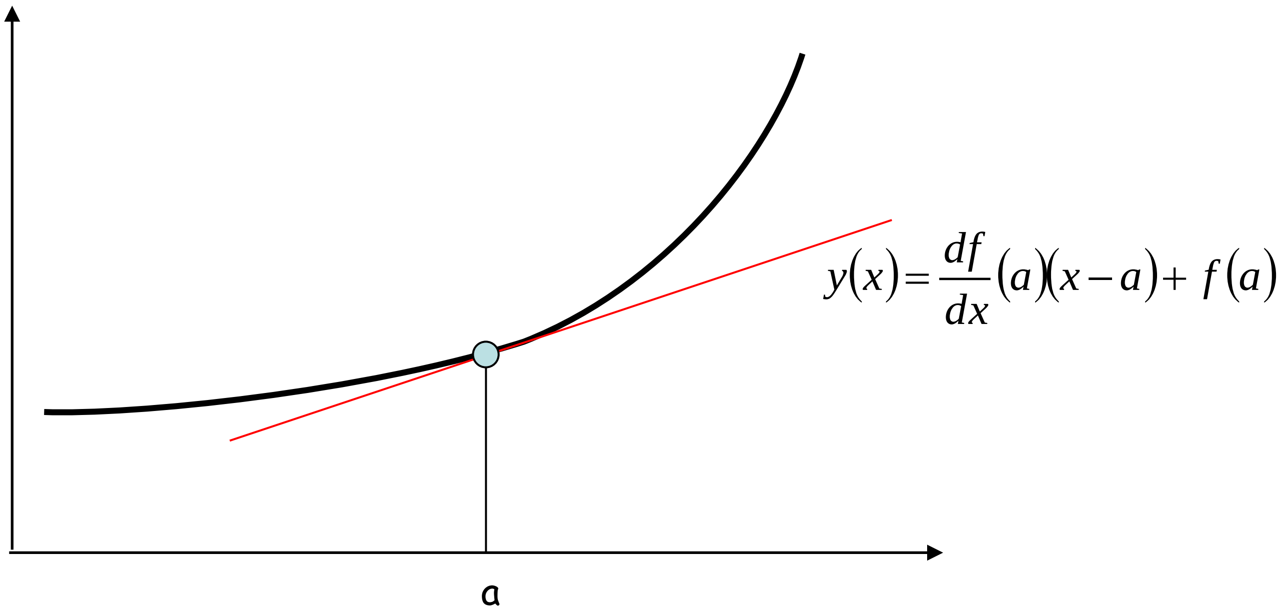
Utilisation des règles

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(f(x)\right) &= 4\cos^3\left((3x+1)^2\right)\frac{d}{dx}\cos\left((3x+1)^2\right) \\
&= 4\cos^3\left((3x+1)^2\right)\left(-\sin\left((3x+1)^2\right)\right)\frac{d}{dx}(3x+1)^2 \\
&= -4\cos^3\left((3x+1)^2\right)\sin\left((3x+1)^2\right)\times 2(3x+1)\frac{d}{dx}(3x+1) \\
&= -4\cos^3\left((3x+1)^2\right)\sin\left((3x+1)^2\right)\times 2(3x+1)\times 3 \\
&= -24(3x+1)\cos^3\left((3x+1)^2\right)\sin\left((3x+1)^2\right)
\end{aligned}$$

Applications de la dérivée

Calcul de la droite tangente en un point d'une fonction

$$y(x) = \frac{df}{dx}(a)(x-a) + f(a)$$



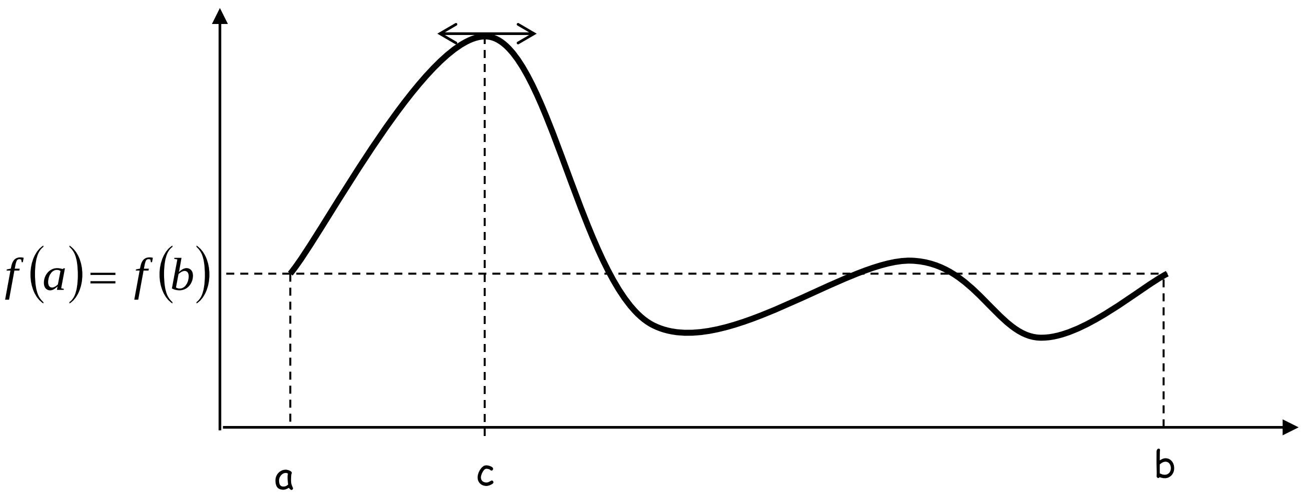
Théorème de Rolle et des accroissements finis

Théorème de Rolle : Soit une fonction f continue sur le segment [a,b]. Si $f(a)=f(b)$ et si

$$\frac{df}{dx}$$

Existe pour tout x dans l'intervalle ouvert]a,b[, alors il existe au moins un point c de]a,b[tel que

$$\frac{df}{dx}(c)=0$$

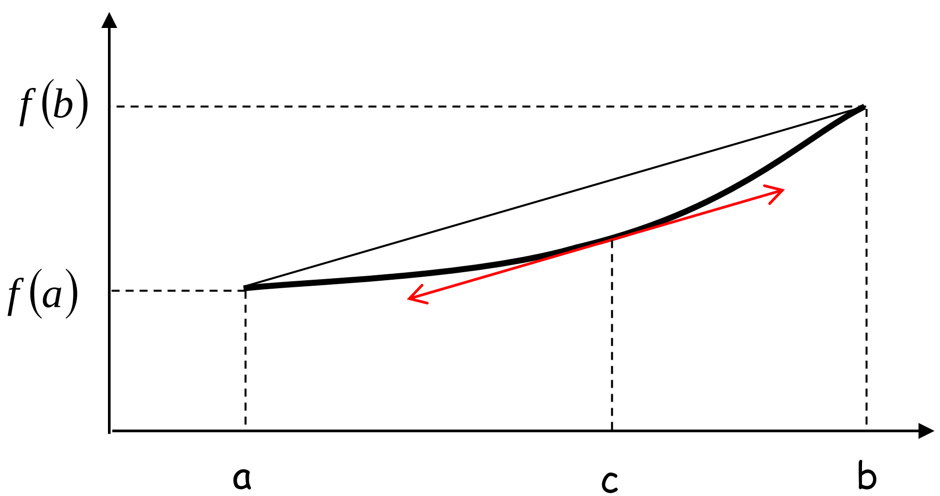


S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Théorème de Rolle et des accroissements finis

Théorème des accroissements finis : Soit *f* une fonction continue sur le segment [a,b], et dérivable partout dans l'intervalle ouvert]a,b[. Alors quels que soient les nombres *a* et *b* dans cet intervalle, il existe un nombre *c* compris strictement entre *a* et *b* tel que

$$f(b)-f(a)=\frac{df}{dx}(c)(b-a)$$



L'explication pratique de ce théorème est qu'il existe un point *c* entre *a* et *b* tel que la tangente en *c* est parallèle à la droite passant par *a* et *b*

Conséquences du théorème des accroissements finis

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I :

1. S'il existe une constante M telle que $\left|\frac{df}{dx}(x)\right| \leq M$ pour tout x dans cet intervalle, alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b-a| \quad \forall \mathrm{a, b} \in \mathrm{I}$$

2. S'il existe une constante m telle que $\left|\frac{df}{dx}(x)\right| \geq m$ pour tout x dans cet intervalle, alors

$$|f(b) - f(a)| \geq m|b-a| \quad \forall \mathrm{a, b} \in \mathrm{I}$$

L'explication pratique de ce théorème traduit l'idée *qu'en n'allant pas vite on ne va pas loin pendant un laps de temps donné* (1.) ou au contraire *qu'en allant vite on va loin* (2.).

Ce théorème est la base pour définir la monotonie des fonctions (signe de la dérivée)

Variations des fonctions – Notions d'extremums

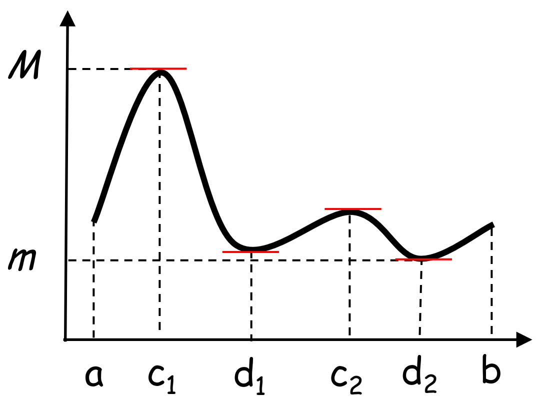
Maximum local : Le nombre $f(c)$ est un **maximum local** de la fonction f s'il existe un intervalle ouvert contenu dans le domaine de définition de f, et contenant c tel que

$$f(x) \leq f(c)$$

Minimum local : Le nombre $f(d)$ est un **minimum local** de la fonction f s'il existe un intervalle ouvert contenu dans le domaine de définition de f, et contenant d tel que

$$f(d) \leq f(x)$$

Extremum local : $f(c)$ est un **extremum local** de f, si *$f(c)$ est un maximum ou un minimum local*



Théorème : Si $f(c)$ est un extremum local et si f est dérivable au point c, alors

$$\frac{df}{dx}(c) = 0$$

S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Variations des fonctions – Valeurs critiques et extremums absolus

Théorème des valeurs critiques : Si une fonction continue f admet un extremum relatif en c, alors c doit être une valeur critique de f.

En plus clair : si un point est un maximum relatif ou un minimum relatif pour une fonction, soit la dérivée en ce point est nulle, soit elle n'existe pas (cas par exemple de la valeur absolue, x=0 est une valeur critique)

Variations des fonctions – Méthode pour trouver les extremums absolus

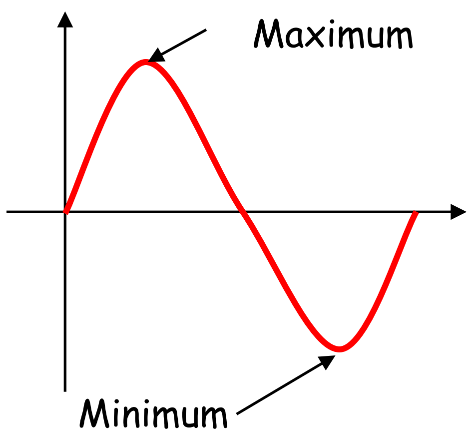
Méthode pour trouver les extremums absolus : Pour trouver les extremums absolus d'une fonction continue *f* sur [a,b]:

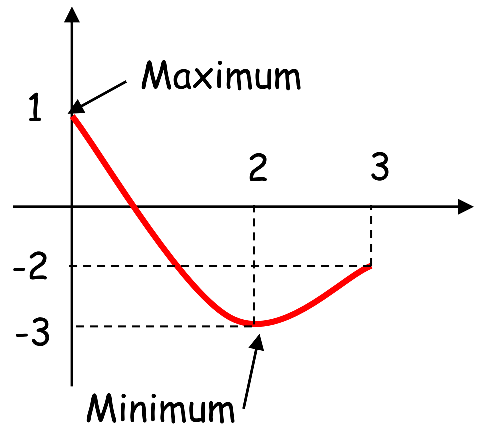
Étape 1. Calculer $\frac{df}{dx}(x)$ et trouver toutes les valeurs critiques de *f* sur [*a,b*].

Étape 2. Évaluer *f* aux extrémités *a* et *b* et pour chaque valeur critique *c*.

Étape 3. Comparer les valeurs obtenues à l'étape 2.

La plus grande valeur est le maximum absolu de *f* sur *[a,b]*, la plus petite valeur est le minimum absolu de *f* sur *[a,b]*





$$f(x) = x^2 - 4x + 1 \text{ sur } [0,3]$$

Variations des fonctions – Test de la dérivée première

Théorème de la fonction monotone

Soit *f*, une fonction dérivable sur l'intervalle ouvert]*a*,*b*[,

Si $\frac{df}{dx}(x) > 0$ sur]a,b[, alors *f* est croissante sur]a,b[

Et

Si $\frac{df}{dx}(x) < 0$ sur]a,b[, alors *f* est décroissante sur]a,b[

S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Test de la dérivée première – Intervalles de croissances et de décroissances

Exemple de tableau de variation – construction du graphe d'une fonction

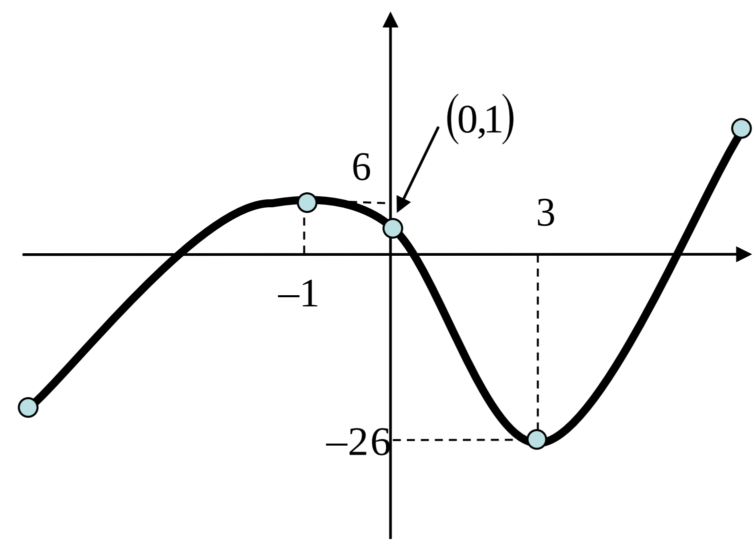
Soit $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$

La dérivée de cette fonction est donnée par $\dfrac{df}{dx}=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

Le tableau de variation est alors donné par

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$\dfrac{df}{dx}$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	6	$\searrow$	-26	$\nearrow$	

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$



Test de la dérivée première

- Chaque extremum relatif correspond à un point critique
- Chaque point critique n'est pas forcément un extremum relatif

Test de la dérivée première pour identifier les extremums relatifs d'une fonction *f*

Méthode pour identifier les extremums relatifs

Étape 1. Définir le domaine de définition de la fonction.

Étape 2. Trouver toutes les valeurs critiques de *f*, i.e. toutes les valeurs *c* du domaine de *f* telles que

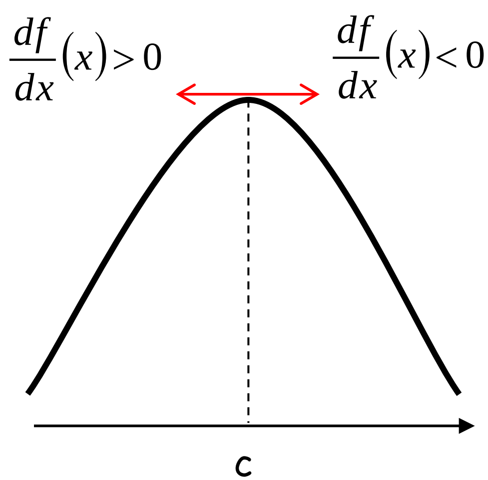
$$\frac{df}{dx}(x)=0 \quad \text{ou} \quad \frac{df}{dx}(x) \text{ n'existe pas}$$

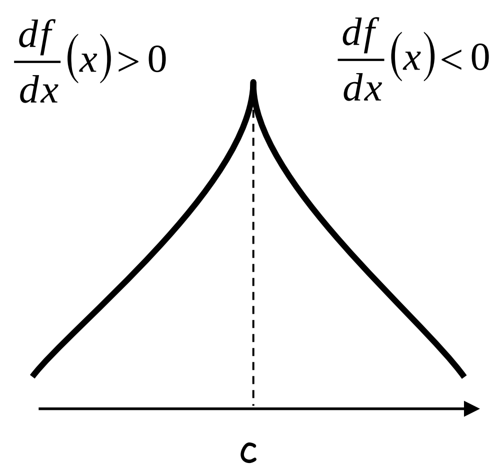
Étape 3. Classer chaque point critique à l'aide des indications suivantes

S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Méthode pour identifier les extremums relatifs

Indication 1. Le point (c,f(c)) est un **maximum relatif** si $\frac{df}{dx}(x)>0$ (fonction croissante) pour tout *x* appartenant à un intervalle ouvert]a,c[à gauche de *c* et $\frac{df}{dx}(x)<0$ (fonction décroissante) pour tout *x* appartenant à un intervalle ouvert]c,b[à droite de c

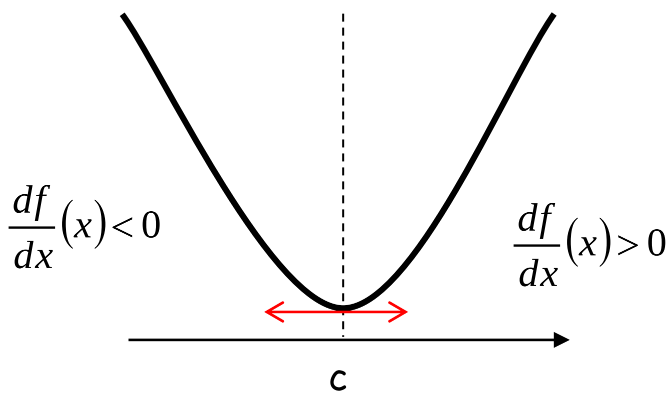


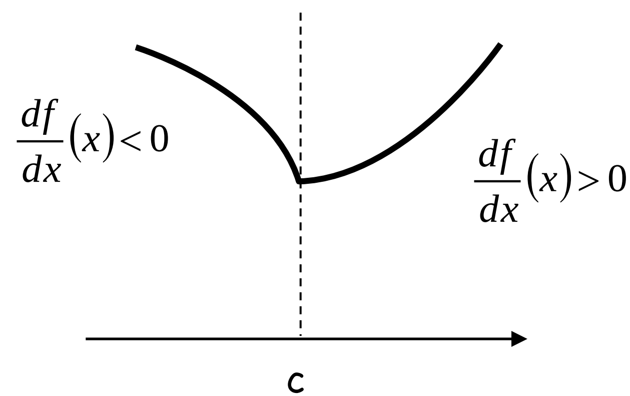


Méthode pour identifier les extremums relatifs

Indication 2. Le point (c,f(c)) est un **minimum relatif** si $\frac{df}{dx}(x)<0$ (fonction décroissante) pour tout

X appartenant à un intervalle ouvert]a,c[à gauche de *c* et $\frac{df}{dx}(x)>0$ (fonction croissante) pour tout *x* appartenant à un intervalle ouvert]c,b[à droite de c

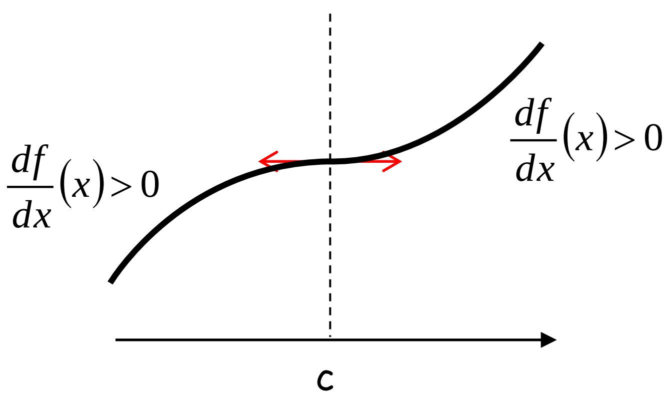


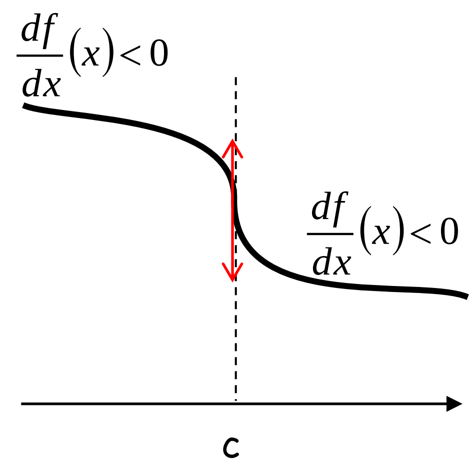


S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Méthode pour identifier les extremums relatifs

Indication 3. Le point (c,f(c)) **n'est pas un extremum relatif** si la dérivée $\frac{df}{dx}(x)$ a le même signe dans les intervalles ouverts]a,c[et]c,b[des deux côtés de *c*





Test de la dérivée première – Intervalles de croissances et de décroissances

Exemple de tableau de variation – construction du graphe d'une fonction

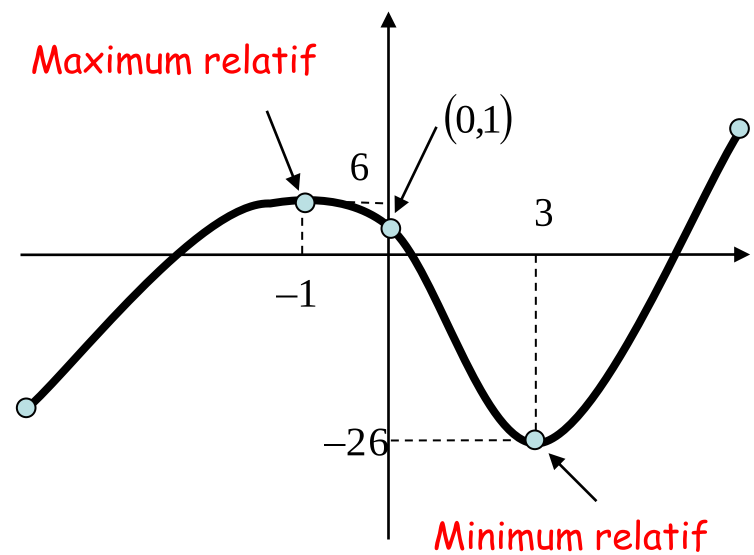
Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

La dérivée de cette fonction est donnée par $\dfrac{df}{dx} = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$

Le tableau de variation est alors donné par

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$\dfrac{df}{dx}$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	6	$\searrow$	-26	$\nearrow$	

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Représentation graphique à l'aide de la dérivée première

RECAPITULATIF

Utilisation de la dérivée première pour tracer le graphe d'une fonction *f*

Étape 1. Définir le domaine de la fonction

Étape 2. Calculer la dérivée $\frac{df}{dx}(x)$ et trouver les valeurs critiques de *f*, i.e. les valeurs pour lesquelles $\frac{df}{dx}(x)=0$ ou $\frac{df}{dx}(x)$ n'existe pas.

Étape 3. Remplacer chaque valeur critique dans *f(x)* pour trouver l'ordonnée du point critique correspondant.

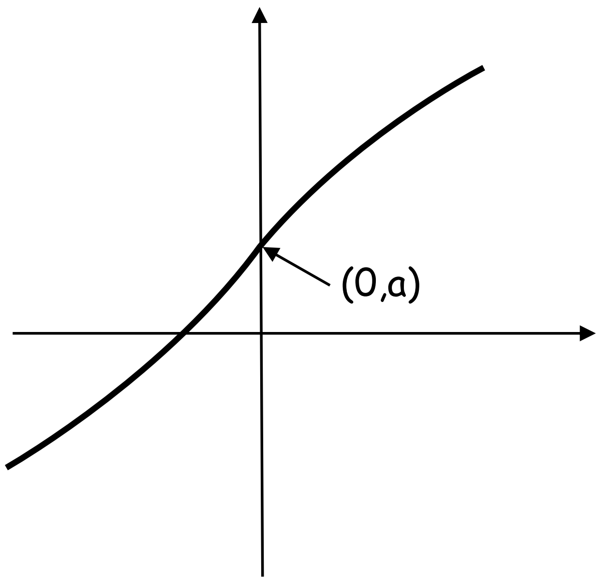
Étape 4. Construire le tableau de variation de la fonction. Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance en vérifiant le signe de la dérivée sur les intervalles dont les extrémités sont les valeurs critiques trouvées à l'étape 2 ou les valeurs n'appartenant pas au domaine *f*.

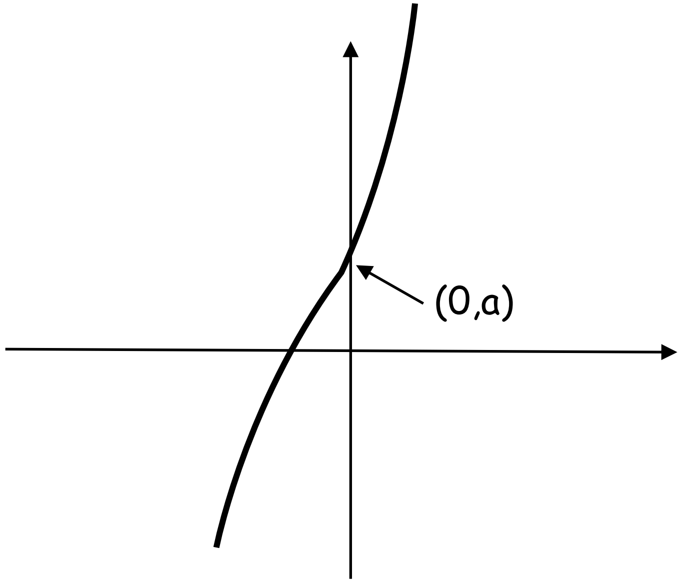
Étape 5. Tracer le graphe en utilisant l'information contenue dans le tableau de variation de *f*

S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Concavité et test de la dérivée seconde

• Le fait de savoir si une fonction est croissante ou décroissante sur un intervalle donnée ne donne qu'une idée partielle de la forme de son graphe



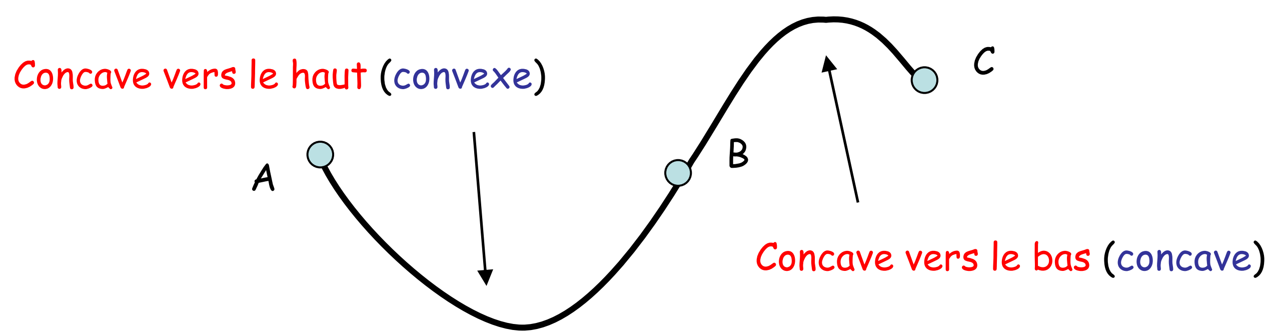


Graphes ayant le même tableau de variation

S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

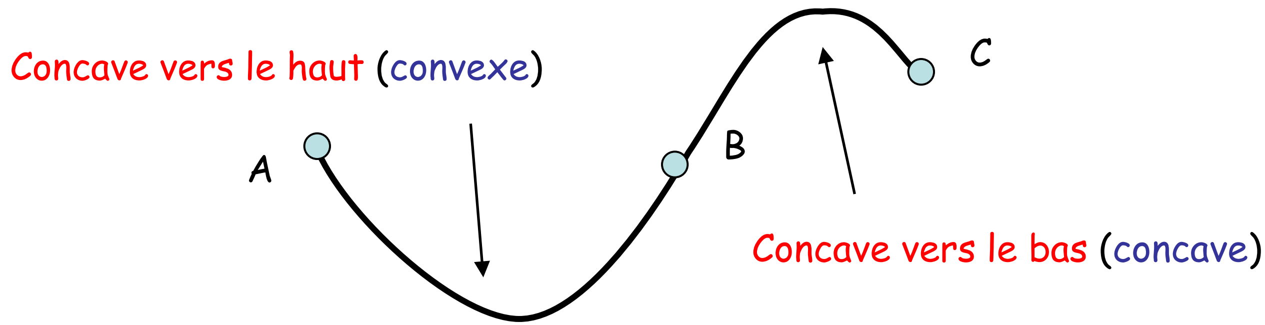
Concavité et test de la dérivée seconde

• Le graphe d'une fonction peut être concave vers le haut ou concave vers le bas sur un intervalle donné



S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Concavité et test de la dérivée seconde



Concavité

Le graphe d'une fonction f est **concave vers le haut** (on dit aussi convexe) sur tout intervalle ouvert I où

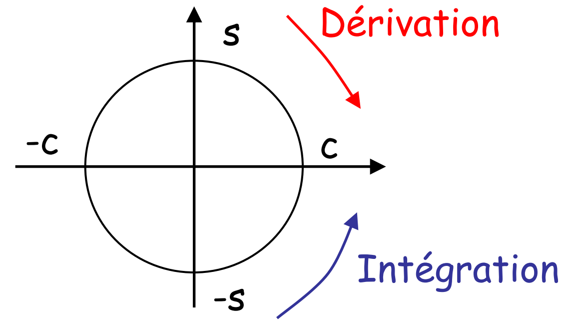
$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) > 0$$

Le graphe d'une fonction f est **concave vers le haut** sur tout intervalle ouvert I où

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) < 0$$

Exemple de la concavité de la fonction sinus

$$f(x) = \sin x \qquad \frac{df}{dx}(x) = \cos x \qquad \frac{d^2 f}{dx^2}(x) = -\sin x$$



Sur l'intervalle $[0,2\pi]$, la fonction sinus s'annule en $\{0,\pi,2\pi\}$

La dérivée est nulle en $\{\pi/2, 3\pi/2\}$

On doit donc s'attendre à ce que la fonction sinus change de concavité sur l'intervalle $[0,2\pi]$

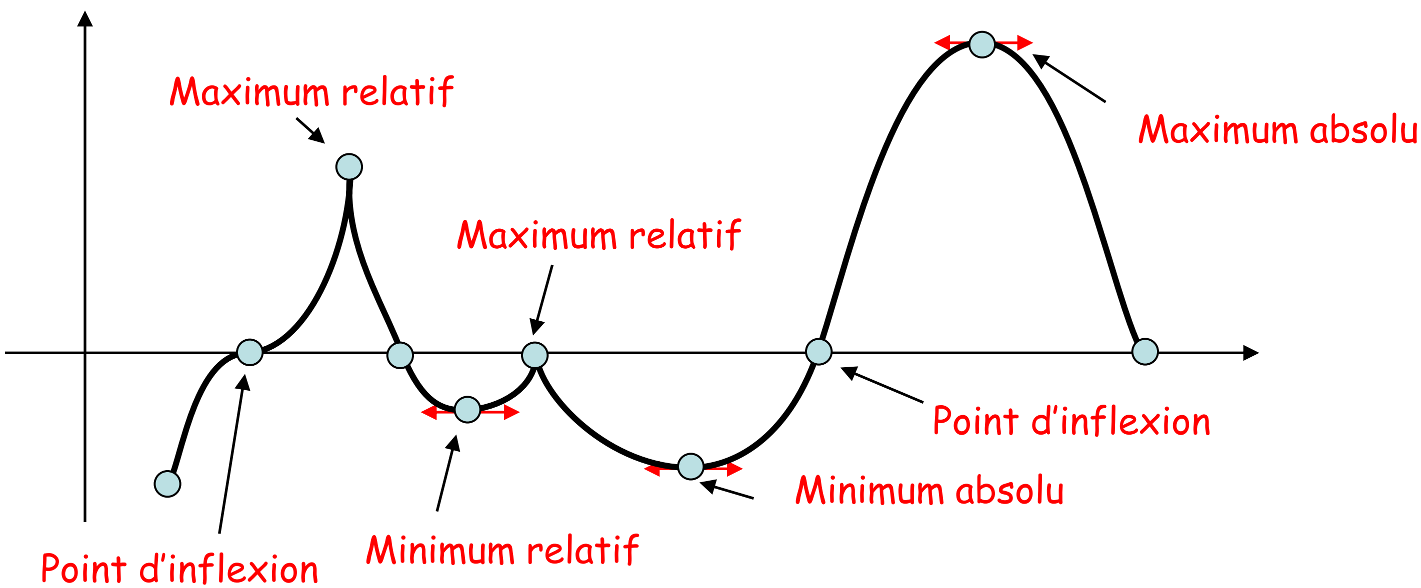
Or sur $[0,\pi]$ la dérivée seconde est négative et donc la fonction est concave vers le bas sur cet intervalle

Sur $[0,\pi]$, la dérivée seconde est positive et donc la fonction sinus est concave vers le haut sur cet intervalle

Points d'inflexion

Point d'inflexion

Soit le graphe d'une fonction f ayant une tangente (peut être verticale) au point $P(c,f(c))$. Si la **Concavité** du graphe change au point P, alors le point P est appelé **point d'inflexion** du graphe.



S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Points d'inflexion

• La concavité du graphe change seulement aux points où

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x) \quad \text{n'existe pas}$$

• Les points d'inflexion correspondent aux valeurs critiques de la dérivée de f

• Une fonction continue f n'a pas forcément un point d'inflexion lorsque

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) = 0$$

• Exemple de la fonction $f(x) = x^4$, la dérivée seconde est nulle mais la concavité ne change pas

Utilisation du test de la dérivée seconde pour la construction du graphe

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10 \qquad \frac{df}{dx}(x) = 4x^2(x-3) \qquad \frac{d^2 f}{dx^2}(x) = 12x(x-2)$$

Calcul des valeurs critiques

① Le domaine de définition de *f* est l'ensemble des réels

② La dérivée existe sur tout ce domaine et admet 0 et 3 comme racines

③ D'après **l'indication 3 sur les extremums relatifs** :

• Les dérivées à droite et à gauche de *0* sont de même signe : *0* n'est pas un extremum relatif

• La dérivée à gauche est négative et la dérivée à droite est positive : *3* est un minimum relatif

Calcul des valeurs critiques de la dérivée seconde (concavité)

① La dérivée seconde est définie sur l'ensemble de définition de *f*

② La dérivée seconde s'annule en *0* et en 2

③ D'après la définition des points d'inflexions

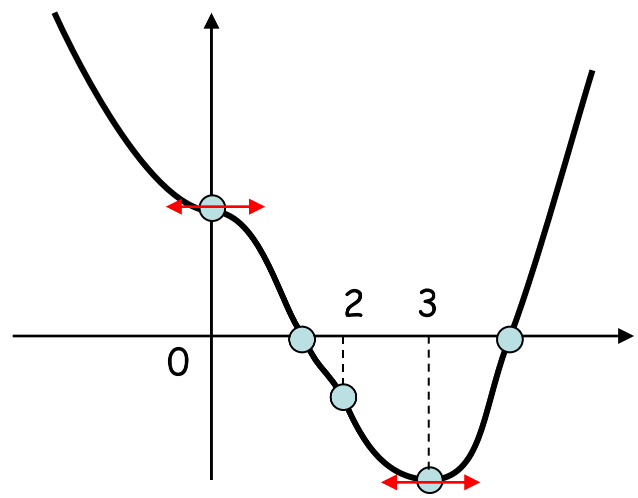
• Les dérivées secondes à gauche et à droite de *0* et de *2* changent de signe : la concavité du graphe change en ces points . Les valeurs *0* et *2* sont des **points d'inflexion**.

Utilisation du test de la dérivée seconde pour la construction du graphe

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$\frac{df}{dx}$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{d^2f}{dx^2}$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
f		$\searrow$ $\cup$	10	$\searrow$ $\cap$	-6	$\searrow$ $\cup$	-17	$\nearrow$ $\cup$	
Allure du graphe			$(0,10)$		$(2,-6)$		$(3,-17)$		

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$



$$f(x)=x^4-4x^3+10 \qquad \frac{df}{dx}(x)=4x^2(x-3) \qquad \frac{d^2f}{dx^2}(x)=12x(x-2)$$

Études locales des fonctions

Notions de développements limités

Généralités

• Une fonction *f* admet un développement limité **au voisinage** de *0* à l'ordre *n* si *f* est de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$$

La fonction $o(x)$ est appelée *O* de Landau et est définie par

$$\lim_{x \to 0} o(x^n) = 0$$

• Une fonction *f* admet un développement limité **au voisinage** de x_0 à l'ordre *n* si *f* est de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right)$$

• Une fonction *f* admet un développement limité **au voisinage** de ∞ à l'ordre *n* si *f* est de la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

Généralités

• Si f est de classe C^n (n fois dérivable) au voisinage de x_0, alors f admet un développement limité à l'ordre n : **formules de Taylor**.

Formule de Taylor avec reste intégral

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\frac{df}{dx}(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}(x_0)+\int_{x_0}^{x}\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}.\frac{d^nf}{dt}(t)dt$$

• On notera que si l'on limite le développement à l'ordre $n=1$, on retrouve l'équation de la tangente de la fonction au point x_0 :

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\frac{df}{dx}(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)$$

Formule de Taylor-Young

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\frac{df}{dx}(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}(x_0)+\frac{(x-x_0)^n}{n!}.\frac{d^nf}{dx}(x_0)+o\left((x-x_0)^n\right)$$

Exemple au voisinage de 0 sur les fonctions usuelles

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+..+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

C_n^α

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)..(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+o\left(x^n\right)$$

- Le premier terme du développement est appelé équivalent de la fonction

Autres formules

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right)$$

Opérations sur les développements limités

Somme

• Si f et g admettent un développement limité respectivement à l'ordre n et m, au voisinage de x_0, fini ou non, alors $f+g$ admet un développement limité à l'ordre Min(n,m), obtenu en ajoutant les deux développements limités de f et g.

Exemple : Somme des fonctions sinus (ordre 5) et cosinus (ordre 4)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)$$

$$\longrightarrow$$

$$\sin x + \cos x = x - \frac{x^3}{3!} + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)$$

$$= 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)$$

Produit

• Si f et g admettent un développement limité respectivement à l'ordre n et m, au voisinage de x_0, fini ou non, alors fg admet un développement limité à l'ordre Min(n,m), obtenu en multipliant les deux développements limités de f et g.

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$g(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$f(x)g(x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

Composition

• Si f admet un développement limité respectivement à l'ordre n au voisinage de x_0, fini ou non, si le terme constant vaut a_0 et si g admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a_0 alors gof admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a_0, obtenu en développant la composée des développements limités de f et g.

Exemple : Développement de la fonction exp(cos x) à l'ordre 4 au voisinage de 0

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right) = 1 + X$$

$$e^{(1+X)} = e^1 \times e^X = e \times \left(1 + X + \frac{X^2}{2} + o\left(X^2\right)\right)$$

X^2 est d'ordre 2 en x, on ne développe que les termes allant en X^2

$$1 + X + \frac{X^2}{2} + o\left(X^2\right) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right)$$

$$e^{(\cos x)} = e \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6}\right) + o\left(x^2\right)$$

Quotient

• Si f et g admettent un développement limité à l'ordre n, au voisinage de x_0, fini ou non, et si le coefficient constant de g est non nul alors f/g admet un développement limité à l'ordre n.

Exemple de la fonction tangente

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)}$$

On utilise le développement de $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o\left(x^5\right)$ avec $u = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$

$$\tan x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o\left(x^5\right)\right)$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^6\right)$$

Intégration et dérivation

• Si f est continue et dérivable au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, et si sa dérivée admet un développement limité en x_0 à l'ordre n, alors f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en x_0, obtenu en intégrant celui de sa dérivée.

Exemple

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

• Si f admet un développement limité au voisinage de x_0 à l'ordre n, et **si l'on sait que sa dérivée première admet un développement limité à l'ordre n-1** (si la fonction est n fois dérivable), alors le développement limité de la dérivée s'obtient en dérivant le développement de f au voisinage de x_0.

Exemple

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

Applications des développements limités pour l'étude des fonctions

- Étude des limites d'une fonction au voisinage d'un point

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}=\frac{0}{0}$$

- Par utilisation des développements limités, on donne un équivalent au voisinage de 0 (partie principale)

$$\sin 3x \sim 3x$$

$$\tan 5x \sim 5x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}\sim\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}$$

Applications des développements limités pour l'étude des fonctions

- Étude des limites d'une fonction au voisinage d'un point

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x \quad a\in R^+ \qquad \ln f(x) = x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)$$

- Au voisinage de ∞, on donne l'équivalent de la fonction ln(1+a/x) soit

$$\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\sim\frac{a}{x} \qquad \ln f(x)\sim x\left(\frac{a}{x}\right)=a$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln f(x)=a \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=e^a$$

- Si a=0

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

Applications des développements limités pour l'étude des fonctions

• Étude locale d'une fonction au voisinage d'un point : tangente, concavité et point d'inflexion

• Si, au voisinage de x_0, on a

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right)$$

Alors

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

Est l'équation de la tangente, f se prolonge par continuité en x_0 par $f(x_0)$

• Si $a_2 \neq 0$, la position par rapport à la tangente est donnée par le signe de a_2.

Applications des développements limités pour l'étude des fonctions

• Étude locale d'une fonction au voisinage d'un point : tangente, concavité et point d'inflexion

• Si, au voisinage de x_0, on a

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_3(x - x_0)^3 + o\left((x - x_0)^3\right)$$

Et si $a_3 \neq 0$, alors il y a un point d'inflexion au point d'abscisse x_0 puisque la courbe traverse sa tangente.

Applications des développements limités pour l'étude des fonctions

• Études des asymptotes

Si au voisinage de ∞, *on a*

$$f(x) = a_0 x + a_1 + \frac{a_2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

alors

$y = a_0 x + a_1$ est l'équation de l'asymptote oblique

Si $a_2 \neq 0$, la position par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de a_2

$$f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$$

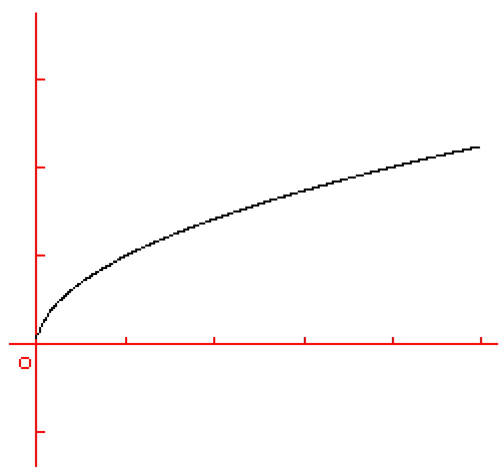
$$= x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Interlude : Les branches paraboliques

- La notion d'asymptote vous a déjà était présentée
- Une autre notion accompagne celle d'asymptote : l'étude des branches paraboliques

Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ Il y a une branche parabolique de direction Ox (exemples: √x,ln x)

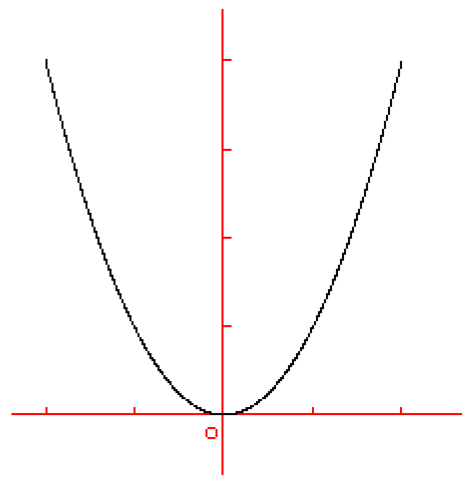


Branche parabolique de direction (Ox)

S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Interlude : Les branches paraboliques

Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ Il y a une branche parabolique de direction Oy (exemples: x^2)



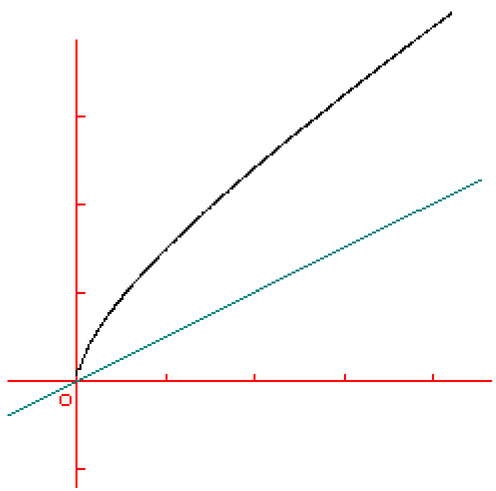
branche parabolique de direction (Oy)

Interlude : Les branches paraboliques

Si $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ Il y a direction asymptotique *y=ax*

- Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax = b$ Alors *y=ax+b* est asymptote oblique
- Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax = \infty$ Alors, il y a une branche parabolique dans la direction *y=ax*

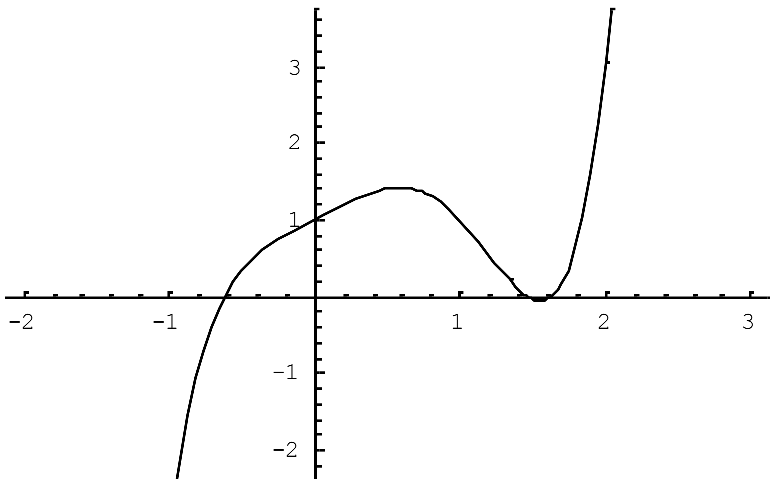
Ex : $\frac{x}{2} + \ln x$



Branche parabolique d'équation y=x/2

- L'étude des branches paraboliques peuvent être complexes
- L'utilisation des développements limités peut simplifier ces études
- Il est ainsi possible à l'aide des dl d'étudier localement le comportement d'une fonction
- Cette notion est très souvent utilisée en physique pour les études locales (au voisinage d'un point) : stabilité, automatique, linéarisation des problèmes non-linéaires…
- Les développements limités sont des outils puissants et très utiles : il faut donc savoir les appliquer et **SURTOUT** connaître les dl usuels et la formule de Taylor-Young.

- Démonstration cuisante de l'intérêt des développements limités. Résoudre



$$f(x) = x^5 - 2x^4 + x + 1 = 0$$

- Il existe en principe 5 racines
- On montre qu'il existe 3 racines réelles données par

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right) = -0{,}618 \qquad x_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{29}{2} - \frac{3\sqrt{93}}{2}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{29}{2} + \frac{3\sqrt{93}}{2}} = 1{,}465 \qquad x_3 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) = 1{,}618$$

- Comment approcher ces racines lorsqu'elles ne sont pas accessibles directement ?

Méthode de Newton-Raphson

• Soit une fonction *f* réelle continue et dérivable sur un intervalle I.

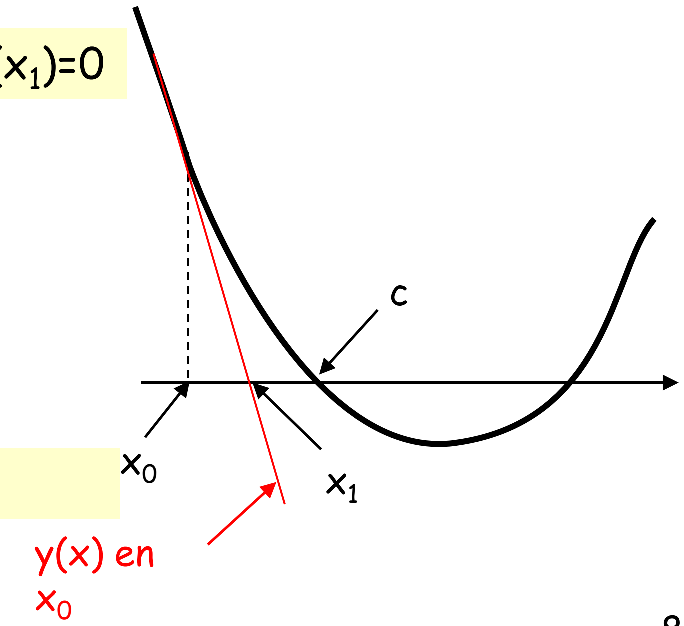
• Après étude de la fonction, on montre qu'elle admet une racine *c* au voisinage d'un point x_0

• Par utilisation de la formule de Taylor-Young au premier ordre (équation de la tangente), il vient

• La tangente coupe l'axe des abscisses en x_1 tel que $y(x_1)=0$

$$y(x_1)=0=f(x_0)+(x_1-x_0)\frac{df}{dx}(x_0)$$

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{\frac{df}{dx}(x_0)}$$



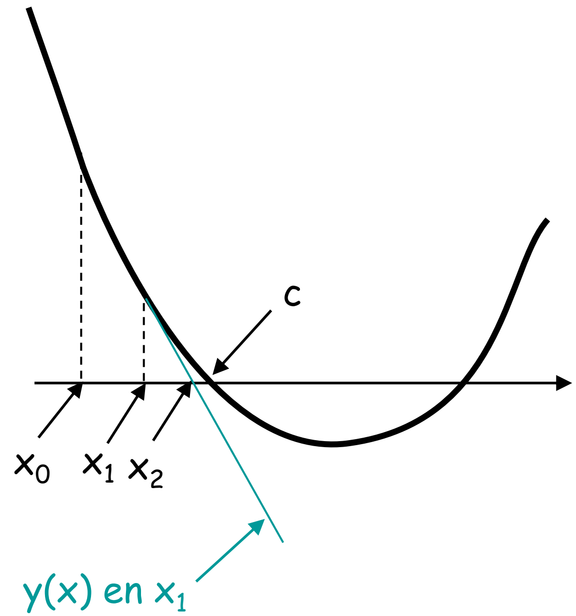
• On réutilise alors ce nouveau point (x_1)

• On réutilise alors ce nouveau point (x_1) et on recommence

• La tangente coupe l'axe des abscisses en x_2 tel que $y(x_2)=0$

$$y(x_2)=0=f(x_1)+(x_2-x_1)\frac{df}{dx}(x_1)$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{\frac{df}{dx}(x_1)}$$



• On recommence le processus jusqu'à obtenir une valeur approchée de *c* que l'on obtient en regardant la différence entre deux solutions

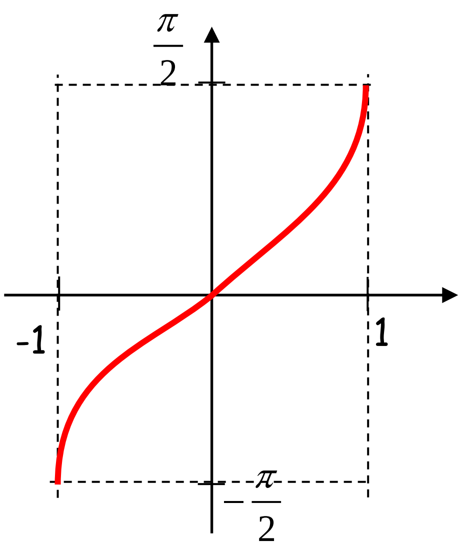
$$\left|f(x_{i+1})-f(x_i)\right|\leq\varepsilon$$ ← Précision Souhaitée

• C'est cette méthode qui est utilisée dans vos calculatrices pour trouver les racines d'une fonction (et ce quelque soit la fonction, si elle possède des racines réelles)

• Cette méthode est appelée méthode de NEWTON-RAPHSON

Fonctions trigonométriques inverses

Fonctions arcsinus et arccosinus



$$y = \arcsin x$$

Si et seulement si

$$x = \sin y$$

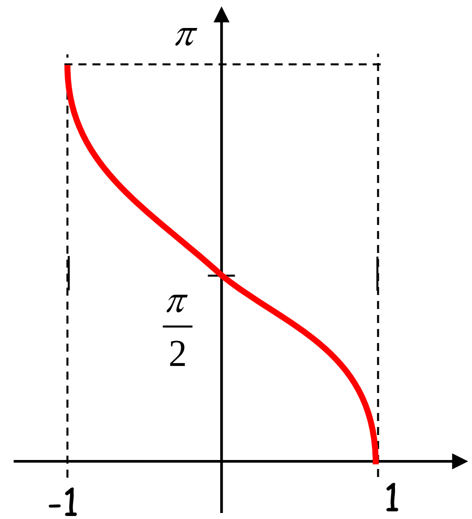
et

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$dl_n(\arcsin x) = \int dl_{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$$



$$y = \arccos x$$

Si et seulement si

$$x = \cos y$$

et

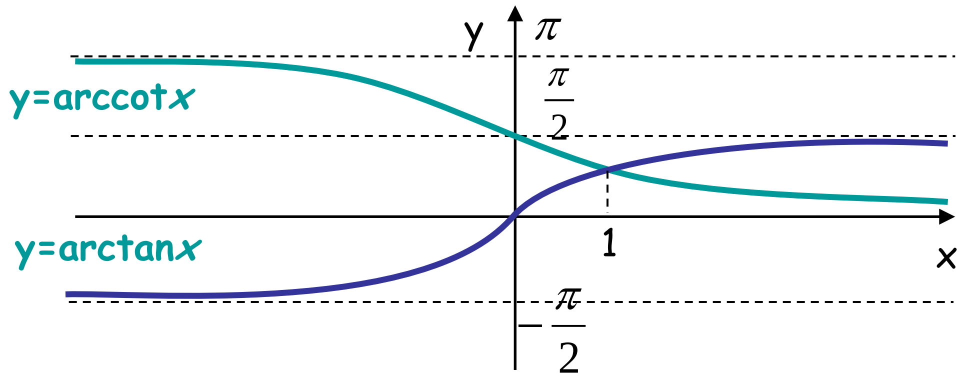
$$0 \leq y \leq \pi$$

$$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$dl_n(\arccos x) = -\int dl_{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arcsin(x)$$

Fonctions arctangente et arccotangente



$$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$$
$$x \in R$$
$$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$
$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$
$$dl_n(\arctan x) = \int dl_{n-1}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$
$$\arctan(-x) = -\arctan(x)$$

$$y = \operatorname{arc\,cot} x \Leftrightarrow x = \cot y$$
$$x \in R$$
$$0 < y < \pi$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$$
$$dl_n(\operatorname{arccot} x) = -dl_n(\arctan x)$$
$$\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot}(x)$$

Quelques propriétés des fonctions réciproques trigonométriques

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arccot}(x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \arctan x & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} - \arctan x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} + \begin{cases} \pi & \text{si } xy > 0 \text{ et } x > 0 \\ 0 & \text{si } xy < 1 \\ -\pi & \text{si } xy > 1 \text{ et } x < 0 \end{cases}$$

Notions sur les différentielles

Rappels sur les dérivées et notions de différentielles : fonctions différentiables

• La notion de fonction différentiable est très voisine de celle de fonction dérivable,

• Elle présente sur cette dernière l'avantage de pouvoir se généraliser au cas de fonctions de plusieurs variables que nous verrons par la suite,

• Rappelons l'expression du nombre dérivée d'une fonction *f* au point x_0 est donné par

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \delta x) - f(x_0)}{\delta x}$$

• La notion de différentielle permet d'évaluer quantitavement la variation d'une fonction *f* pour un accroissement (variation) δx de la variable x

• La notion de différentielle consiste donc à évaluer la différence δf définie par

$$\delta f = f(x_0 + \delta x) - f(x_0)$$

Rappels sur les dérivées et notions de différentielles : fonctions différentiables

- On appelle différentielle de la fonction *f* au point *x* pour un accroissement δx

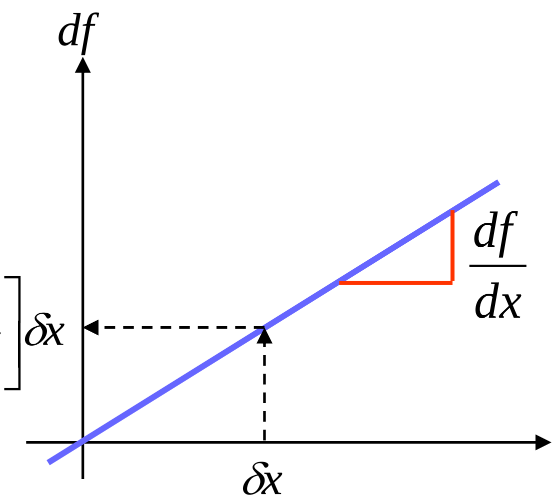
$$df(\delta x) = \frac{df}{dx}(x)\delta x$$

- Ici la variable est l'accroissement δx
- La relation ci-dessus correspond donc à l'équation d'une droite de coefficient directeur

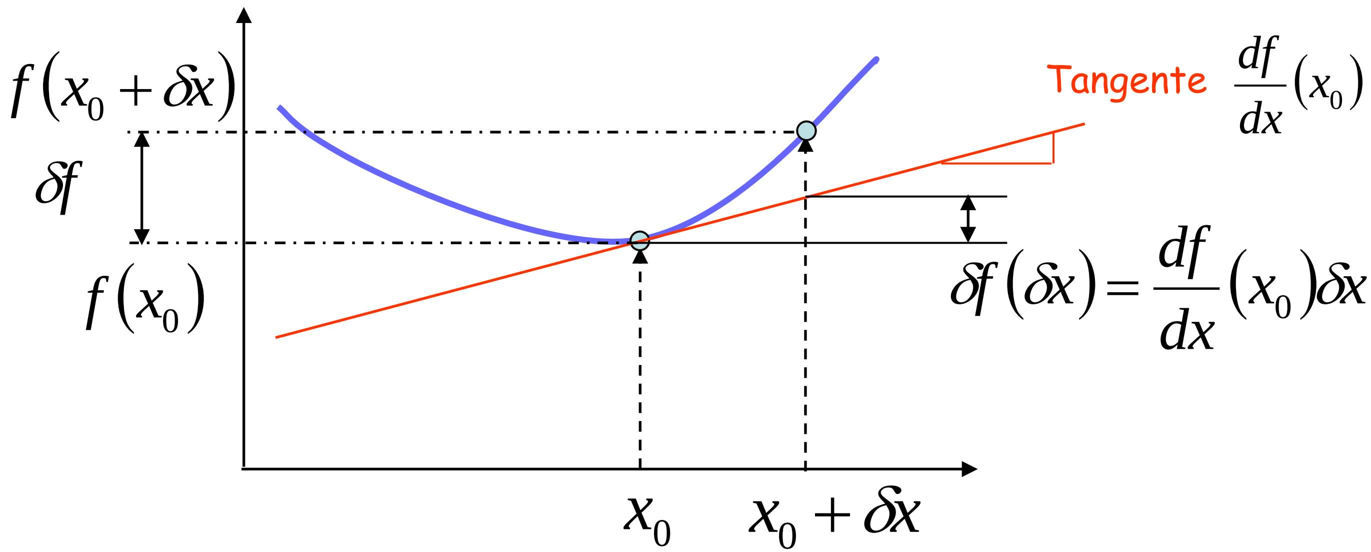
$$\frac{df}{dx}(x)$$

Interprétation géométrique

$$df(\delta x) = \left[\frac{df}{dx}\right]\delta x$$



Interprétation géométrique de la notion de différentielle et intérêts



- A partir du concept de différentielle, il est ainsi possible d'évaluer la variation de f pour un accroissement δx de la variable
- Ceci est encore plus vrai quand δx devient petit
- Lorsque cet accroissement est aussi petit que possible alors $\delta x \to dx$ et on note

$$df = \left[\frac{df}{dx}\right]dx$$

Méthode pour calculer les différentielles

• La première étape consiste à calculer la dérivée de la fonction *f* par rapport à la variable

$$\left[\frac{df}{dx}\right]$$

• Ensuite, on calcule la valeur de la dérivée au point considéré x_0

$$\left[\frac{df}{dx}\right](x_0)$$

• La différentielle s'obtient alors en multipliant par la valeur de l'accroissement

$$df = \frac{df}{dx}(x_0).dx$$

Exemple sur la fonction x^2

- Soit la fonction x^2, calculons l'accroissement de cette fonction au point $x_0=100$ pour un accroissement dx=0.01
- Calculons la dérivée

$$\left[\frac{df}{dx}\right] = 2x$$

- La valeur de cette dérivée en $x_0=100$ donne

$$\left[\frac{df}{dx}\right](100) = 200$$

- La différentielle (l'accroissement de la fonction) donne alors

$$df = \frac{df}{dx}(x_0).dx = 2$$

- On montrera l'utilité des différentielles et notamment avec les fonctions de plusieurs variables (calculs d'erreurs, thermodynamique, physique)

Relations fondamentales

- Soit deux fonctions *f* et *g* et deux réels μ et λ

$$d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg$$

$$d(fg) = gdf + fdg$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$$

$$d(fog) = d(f[g(x)]) = \frac{df}{dg}.\frac{dg}{dx}dx$$

Introduction brève aux fonctions de plusieurs variables

-

Différentielle d'une fonction de plusieurs

Calculs d'erreurs

Notions essentielles

- Soit une fonction de plusieurs variables x_i

$$df(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ Est appelée dérivée partielle par rapport à x_i en considérant les autres variables comme constantes

$$U(R,I)=RI$$

$$\frac{\partial U}{\partial I}=R$$

$$\frac{\partial U}{\partial R}=I$$

$$dU(R,I)=\frac{\partial U}{\partial R}dR+\frac{\partial U}{\partial I}dI=IdR+RdI$$

Calculs d'erreurs – Dérivée logarithmique

- Soit une fonction *f* de plusieurs variables x_i représentative d'un phénomène physique
- On prend le logarithme népérien de cette fonction
- On différencie la fonction soit

$$\frac{df}{f} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{x_i}$$

- On prend la valeur absolue de chaque dérivée partielle, pour obtenir l'erreur relative

$$\frac{\Delta f}{f} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \frac{\Delta x_i}{x_i}$$

Calculs d'erreurs – Dérivée logarithmique

• Exemple en électricité

$$U = RI$$

$$\ln U = \ln R + \ln I$$

$$\frac{dU}{U} = \frac{dR}{R} + \frac{dI}{I}$$

• Passage aux erreurs (les erreurs se cumulent)

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta I}{I}$$

L'erreur commise sur la mesure d'une tension aux bornes d'une résistance est donnée par la somme de l'erreur commise sur la résistance et l'intensité.

Recherche de maximums et de minimums

Pour des applications pratiques

-

Optimisation

Comment utiliser le calcul différentiel pour trouver des optimums

• Dans ce qui précède, on a démontrer l'importance du calcul différentiel pour l'étude des fonctions,

• Donnons maintenant des applications pratiques du calcul différentiel

• Un problème d'optimisation consiste à chercher le minimum (ou le maximum) d'une fonction donnée

Toute chose dans la nature se rattache à un maximum ou à un minimum

Léonard Euler (1707-1783)

Processus d'optimisation (d'après la méthode de Pólya)

Étape 1: Comprendre l'énoncé du problème. Se demander si l'on peut séparer les quantités données de celles que l'on doit trouver. Quelles sont les quantités inconnues ? Faire un schéma du pour mieux comprendre le problème.

Processus d'optimisation (d'après la méthode de Pólya)

Étape 2: Définir les variables. Décider quelle quantité doit être optimisée (i.e. rendue maximale ou minimale) et lui donner un nom, par exemple Q. Définir d'autres variables pour les quantités inconnues et légender le schéma à l'aide des symboles choisis

Étape 3: Exprimer Q en fonction des variables définies à l'étape 2. Utiliser les renseignements donnés dans l'énoncé pour définir Q en fonction d'une seule variable, par exemple x. En d'autres termes Q peut, au début, être représenté par une formule faisant intervenir plusieurs variables.

L'objectif est alors, en utilisant les informations données et les formules connues, de l'écrire en fonction d'*une seule* variable, de sorte que $Q=f(x)$

Étape 4: Déterminer le domaine de la fonction $Q=f(x)$

S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Processus d'optimisation (d'après la méthode de Pólya)

Étape 5: Utiliser le calcul différentiel pour trouver le minimum (ou le maximum) *absolu* de *f*. En particulier, si le domaine de *f* est un intervalle fermé [a,b], la méthode suivante peut être utilisée :

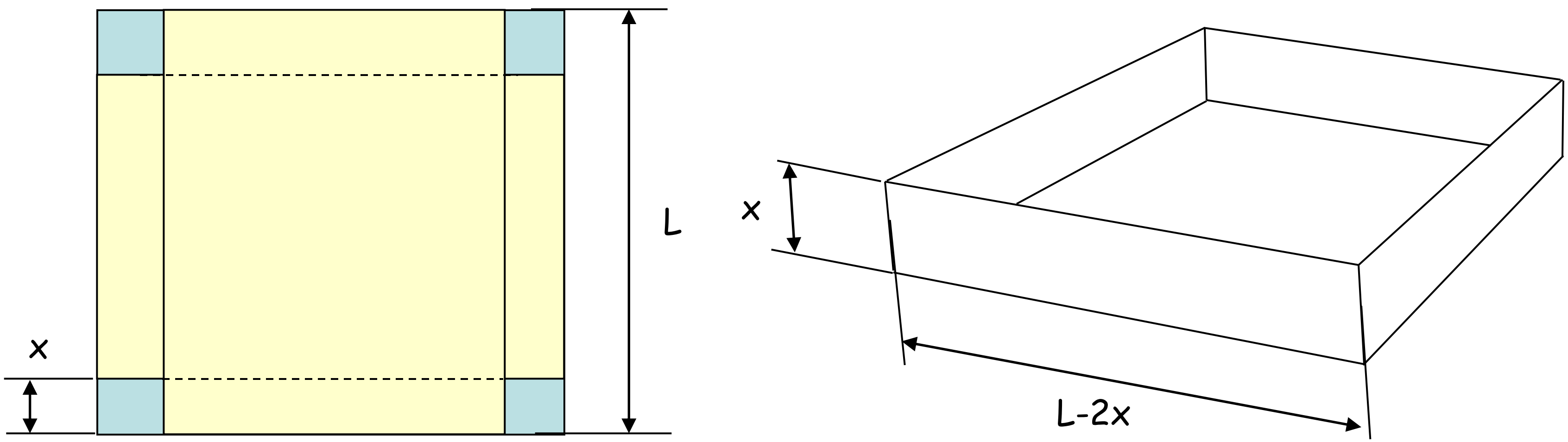
a. Calculer df/dx et trouver toutes les valeurs critiques de *f* sur [a,b];

b. Evaluer *f* aux bornes *a* et *b* du domaine et pour chaque valeur critique *c*;

c. Comparer les valeurs obtenues à l'étape **b.** pour déterminer quelle est la plus grande ou la plus petite;

Etape 6: Remettre le résultat obtenu à l'étape 5 dans le contexte du problème original en faisant toutes les interprétations qui conviennent. Répondre à la question posée.

Exemple de la boite



- Pour quelle hauteur de la boite, celle-ci peut-elle contenir un maximum d'objets

E1 : Pour quelle(s) valeur(s) de *x*, le volume *V* est maximal ?

E2-E3 : Formulation de la fonction

$$V = x(L-2x)^2 = x\left(L^2 - 4xL + 4x^2\right) = 4x^3 - 4Lx^2 + L^2x$$

S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Exemple de la boite

$$V = 4x^3 - 4Lx^2 + L^2 x$$

• E4-E5: Pour que le volume soit maximal, calculons les valeurs critiques du volume par rapport à la variable à optimiser soit *x*

$$\frac{dV}{dx} = 12x^2 - 8Lx + L^2 = 0$$

$$\Delta = 64L^2 - 48L^2 = 16L^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{8L - \sqrt{16L^2}}{24} = \frac{4L}{24} = \frac{L}{6} \qquad x_2 = \frac{8L + \sqrt{16L^2}}{24} = \frac{12L}{24} = \frac{L}{2}$$

Exemple de la boite

- E6 : Il existe donc deux solutions
- Une étude de variation (valeurs critiques et concavité) donne x_1 comme maximum
- La seconde solution n'est pas physique car dans ce cas la boîte se résume à un volume nul
- Le volume maximal est alors

$$V\left(x_1 = \frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27}$$

- Dans certains cas, il est possible de ne pas trouver d'optimum

Calcul intégral

Technique d'intégration

Introduction générale

- Le calcul intégral et différentiel sont les outils les plus utilisés par les physiciens
- La maîtrise de ces deux notions permet alors de résoudre la majorité des études pratiques et théoriques des sciences modernes en corrélation avec les théories associées
- Jusqu'à présent la notion d'intégrale a été présentée comme l'outil permettant de calculer l'aire limitée par une courbe
- Ce concept est très utilisé (et nous l'utiliserons) pour introduire le calcul intégral
- Néanmoins, il est trop réducteur et donne une idée que trop simple de la notion d'intégrale
- Dans ce cours, on donnera les outils nécessaires pour le calcul intégral
- On étendra ces outils pour la physique : intégrales de surface, de volume, curviligne (thermodynamique, électro-(statisme, magnétisme, dynamique…))
- On réutilisera alors ces outils (en plus du calcul différentiel) pour le graal de la connaissance du 1er cycle universitaire : les équations différentielles (DUT 2ème année)

Notion de primitives

- Nous avons étudié jusqu'à présent les fonctions admettant une dérivée
- Inversement, étant donné *f*, on se propose (on vous impose) de trouver les fonctions dérivables *g* dont la dérivée est *f*
- Une telle fonction *g* est appelée ***primitive de f***

Définition et réciproque

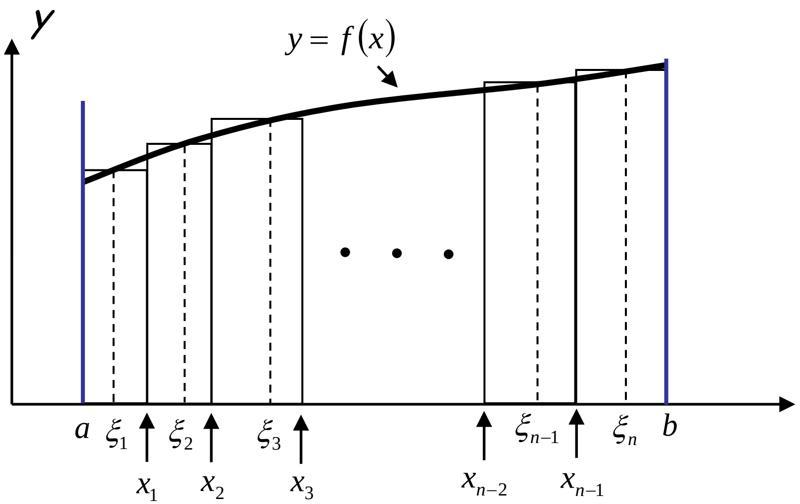
- Soit *f* une fonction définie sur un intervalle *I* de *R*, admettant une primitive *g*. Pour tout nombre réel *c*, la fonction *g+c* est encore primitive de la fonction *f*

$$\frac{d}{dx}\left(g(x)+c\right)=\frac{dg}{dx}=f(x)$$

- Réciproquement, pour toute primitive *h* de *f*, il existe un nombre réel *c* tel que *h=g+c*. Autrement dit, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Définition d'une intégrale

• L'introduction d'une intégrale est souvent présentée par le désir de calculer l'aire limitée par une courbe $y=f(x)$, l'axe des abscisses x et les droites verticales $x=a$ et $x=b$



• On décompose l'intervalle [a,b] en n sous-intervalles d'extrémités les point $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ choisis **arbitrairement**

• Dans chacun des intervalles prenons les points ξ_i et formons la somme suivante

$$\sum_{k=1}^{k=n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{k=n} f(x_k)\Delta x_k$$

Définition d'une intégrale

• Géométriquement, cette somme représente l'aire de tout les rectangles formés arbitrairement

• Augmentons le nombre *n* de subdivision de telle façon que chaque $\Delta x_k \rightarrow 0$

• Si la somme a une limite lorsque $n \rightarrow \infty$ (qui ne dépend pas du choix de la subdivision) alors cette limite se note

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k=n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

Qui s'appelle l'intégrale définie de *f(x)* entre *a* et *b*.

• Le terme *f(x)dx* est appelé intégrande

• On notera l'apparition d'un terme introduit en calcul différentiel : l'infiniment petit *dx* (représentant un petit accroissement de la variable *x*, cf. différentielle)

• Cet infiniment petit permet de connaître la variable d'intégration

• [a,b] est le domaine d'intégration et *a*, *b* les limites d'intégration

Définition d'une intégrale

• La limite de

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\xi_k\right)\Delta x_k = \int_a^b f\left(x\right)dx$$

Quand *f(x)* est continue (ou continue par morceaux) dans [a,b].

• Lorsque cette limite existe, on dit que *f(x)* es t intégrable au sens de Riemann dans [a,b]

• Géométriquement, la valeur de cette intégrale représente l'aire limitée par la courbe *y=f(x)*, l'axe des abscisses et les droites verticales *x=a* et *x=b* seulement si *f(x)≥0*.

• Une intégrale définie est un nombre

• Une primitive est une fonction

S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Propriétés des intégrales

- Soient *f(x)* et *g(x)* deux fonctions intégrables sur [a,b], alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(c)dc$$ *dx* est une variable dite muette

$$\int_a^b \left(k_1.f(x) \pm k_2.g(x)\right)dx = k_1.\int_a^b f(x)dx \pm k_2.\int_a^b g(x)dx$$

k_1 et k_2 sont des constantes réelles

Théorème de Chasles $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

En supposant que *f(x)* soit intégrable sur [a,c] et [c,b]

Si $f(x)>0$ sur [a,b] $$\int_a^b f(x)dx > 0$$

Propriétés des intégrales

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Si $a \le x \le b$ et $m \le f(x) \le M$ où m et M sont des constantes, alors

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Si $a \le x \le b$ et $f(x) \le g(x)$ alors

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \qquad \text{Si } a < b$$

Théorèmes de la moyenne pour les intégrales

Premier théorème de la moyenne

• Si *f(x)* et *g(x)* sont continues sur [a,b] et si *g(x)* a un signe constant dans cet intervalle, alors il existe un point ξ de]a,b[tel que

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

Si *g(x)=1*

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)}$$

Théorèmes de la moyenne pour les intégrales

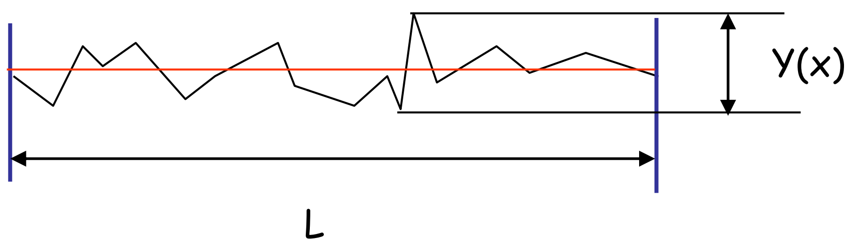
Deuxième théorème de la moyenne

• Si *f(x)* et *g(x)* sont continues sur [a,b] et si *g(x)* est croissante ou décroissante et non nécessairement positive, alors il existe un point ξ de]a,b[tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx$$

Exemple d'utilisation des théorèmes de la moyenne : caractérisation de surfaces

• Il est possible de caractériser la rugosité d'une surface en venant mesurer la profilométrie d'une surface.



$$R_a = \frac{1}{L}\int_0^L |y(x)|dx$$

S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Propriétés fondamentales d'une intégrale définie

• Si *F(x)* est une primitive de *f(x)*, on a alors la propriété fondamentale d'une intégrale définie sur [a,b]

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

• Toute fonction définie et continue sur un intervalle *I* admet des primitives sur *I*

• Même si elle admet des primitives, le calcul explicite de celles-ci est souvent difficile voir impossible

Primitives usuelles

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \in R - \{-1\}$$

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$$

$$\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C, \quad a \in R_{+}^{*} - \{1\}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$$

Primitives usuelles

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad a \in R_+^* - \{1\}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

Méthodes d'intégration

Changement de variable

• Si le calcul d'intégrale n'est pas immédiat à l'aide des fonctions élémentaires, le résultat peut être obtenu en changeant la variable *x* en *t*, au moyen d'une transformation *x=u(t)*.

• Soit *f* une fonction continue sur un segment [a,b] et *u* une fonction de dérivée continue sur le segment [α,β] qu'elle applique sur [a,b], avec a=*u(α)* et b=*u(β)*. En effectuant le changement de variable *x=u(t)*, on obtient

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[u(t)]\frac{du}{dt}dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$$

Posons $\begin{cases} u(x) = \cos x \\ du = -\sin x dx \end{cases}$ $\begin{cases} u(0) = 1 \\ u\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{du}{u} = \left[-\ln|u|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\left(\ln\frac{1}{\sqrt{2}} - \ln 1\right) = \frac{\ln 2}{2}$$

Méthodes d'intégration

Intégration par parties

• Une autre méthode d'intégration consiste à utiliser une propriété des différentielles. Si u et v sont deux fonctions sont continues et différentiables sur [a,b]

$$d(uv) = vdu + udv$$

• Il vient par intégration sur le domaine [a,b] (si f est intégrable sur [a,b])

$$\int_a^b d(uv) = \int_a^b vdu + \int_a^b udv$$

• Or

$$\int_a^b d(uv) = [uv]_a^b$$

• Il vient la méthode d'intégration par parties

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$$

Méthodes d'intégration

Intégration par parties

• Donc si deux fonctions *u* et *v* sont intégrables sur [a,b] alors

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$$

• Exemple sur le calcul d'une primitive de la fonction logarithme népérien

$$\int_a^b \ln x dx$$

• Posons

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \qquad \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{x dx}{x} = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

Méthodes d'intégration

Intégration des fonctions trigonométriques

- La méthode générale consiste à effectuer le changement de variable

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

- alors

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

- Dans le cas où l'intégrande de *f* est impaire, poser $u=\cos x$
- Dans le cas où l'intégrande *f* change de signe si l'on remplace x par $\pi-x$, poser $u=\sin x$
- Dans le cas où l'intégrande *f* est conservée si l'on remplace x par $x+\pi$, poser $u=\tan x$

Méthodes d'intégration

Rappels sur les nombres complexes

- On rappelle l'expression des fonctions sinus et cosinus à l'aide des notations d'Euler

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

- avec

$$j^2 = -1$$

- On rappelle que *j* est un nombre certes complexe mais cela reste un nombre
- Donc les techniques d'intégration restent valables sur le corps des complexes

Méthodes d'intégration

Rappels sur les nombres complexes

• Par utilisation des formules d'Euler, on peut retrouver les formules usuelles à connaître par cœur sur les fonctions trigonométriques

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Méthodes d'intégration

Rappels sur les nombres complexes

- Démonstration

Méthodes d'intégration

Rappels sur les nombres complexes

- Ainsi, on retrouve

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

- De la même manière, on peut retrouver les primitives de cosnx et sin nx (n≠0)
- On appelle cette méthode d'intégration , la méthode en sinus associé

$$\int \cos nx dx + j\int \sin nx dx = \int (\cos nx + j\sin x)dx$$

$$= \int e^{jnx} dx$$

Méthodes d'intégration

Rappels sur les nombres complexes

- Comment intégrer l'exponentielle complexe ?
- Par changement de variables

$$y = jnx \qquad dy = jndx \Leftrightarrow dx = \frac{dy}{jn} = \frac{j}{j^2 n} dy = -\frac{j}{n} dy$$

Méthodes d'intégration

Intégration des fonctions trigonométriques

- Comment intégrer l'exponentielle complexe ?
- Par changement de variables

$$\int \cos nx dx + j \int \sin nx dx = \int e^{jnx} dx$$

$$= -\frac{j}{n} e^{jnx} + C = -\frac{j}{n} (\cos nx + j \sin nx) + C$$

$$= -\frac{j}{n} \cos nx + \frac{1}{n} \sin nx + C$$

- Par association

$$\int \cos nx dx = \frac{1}{n} \sin nx + C \qquad \int \sin nx dx = -\frac{1}{n} \cos nx + C$$

Méthodes d'intégration

Intégration des fonctions trigonométriques

- Il est possible de retrouver ces formules par changement de variable
- Prenons l'exemple du cosinus

$$\int \cos nx dx$$

$$y = nx \qquad dy = n dx \Rightarrow dx = \frac{dy}{n}$$

$$\int \cos nx dx = \frac{1}{n}\int \cos y dy$$

$$= \frac{1}{n}\sin y + C = \frac{1}{n}\sin nx + C$$

- Avantage de la méthode du sinus associé : on calcul les deux primitives en même temps

Méthodes d'intégration

Intégration des fonctions trigonométriques

- Cas des puissances de fonctions trigonométriques

$$\int \cos^2 x dx = ?$$

S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Méthodes d'intégration

Intégration des fonctions avec des radicaux

dans les cas les plus courants et les plus simples

• Dans le cas où l'intégrande contient un radical du premier degré

$$y = \sqrt{ax+b} \qquad a \in \mathbf{R}^* \quad b \in \mathbf{R}$$

• Poser

$$x = \frac{y^2 - b}{a} \qquad dx = \frac{2y}{a}dy$$

Méthodes d'intégration

Primitives de fonctions usuelles (compléments)

$$\int \frac{1}{u(x)}.\frac{du}{dx}dx = \ln\left|u(x)\right| + C$$

$$\int u^{\alpha}(x).\frac{du}{dx}dx = \frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C \qquad \alpha \in \mathbf{R} - \{-1\}$$

$$\int \cos\alpha x dx = \frac{1}{\alpha}\sin\alpha x + C$$

$$\alpha \in \mathbf{R}^{*}$$

$$\int \sin\alpha x dx = -\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x + C$$

Méthodes d'intégration

Formules usuelles sur les fonctions hyperboliques

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$

$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{ch}\, b + \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{sh}\, b$$

$$\mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{ch}\, b - \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{sh}\, b$$

$$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{ch}\, b + \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{sh}\, b$$

$$\mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{ch}\, b - \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{sh}\, b$$

$$(\mathrm{sh}\, x + \mathrm{ch}\, x)^n = \mathrm{ch}\, nx + \mathrm{sh}\, nx \qquad n \in Z$$

$$\mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{th}\, a + \mathrm{th}\, b}{1 + \mathrm{th}\, a\, \mathrm{th}\, b}$$

$$\mathrm{th}(a-b) = \frac{\mathrm{th}\, a - \mathrm{th}\, b}{1 - \mathrm{th}\, a\, \mathrm{th}\, b}$$

$$\mathrm{sh}\, 2a = \frac{2\, \mathrm{th}\, a}{1 - \mathrm{th}^2\, a}$$

$$ch2a = \frac{1 + \mathrm{th}^2\, a}{1 - \mathrm{th}^2\, a}$$

Méthodes d'intégration

Expression des fonctions hyperboliques inverses

$$\operatorname{argch} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \quad \text{si } x \geq 1$$

$$\operatorname{argch}(-x) = -\ln\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right) \quad \text{si } x \leq -1$$

$$\operatorname{argsh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \quad \forall x \in R$$

$$\operatorname{argch} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \quad \text{si } x \geq 1$$

$$\operatorname{arg\,th} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad \text{si } |x| < 1$$

$$\operatorname{arg\,coth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} \quad \forall x \in R-[-1,1]$$

S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Polynômes et Fractions rationnelles

Décomposition en élément simple

S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Cas particuliers

• Intégration de la fraction rationnelle suivante

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

• Dépend de *a*,*b* et *c*

• On tente de se ramener à des primitives de fonctions usuelles

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

Cas particuliers

• Pour cela on tente de se ramener à la forme générale

$$\frac{1}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}.\frac{1}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}$$

• On se ramène à une égalité remarquable

$$(x+d)^2+f=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$$

$$x^2+2dx+d^2+f=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$$

• Il vient

$$d=\frac{b}{2a} \qquad d^2+f=\frac{c}{a}\Leftrightarrow f=\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Cas particuliers

- On regarde alors le signe de *f*
- Si *f*<0, on pose

$$f = -\zeta^2$$

- On a alors

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x+d)^2 - \zeta^2$$

- Il vient

$$\frac{1}{a}.\int \frac{dx}{(x+d)^2 - \zeta^2} = -\frac{1}{a}.\int \frac{dx}{\zeta^2 - (x+d)^2} = -\frac{1}{2a\zeta}\ln\left|\frac{\zeta + x}{\zeta - x}\right| + C$$

Cas particuliers

- On peut alors se ramener à une primitive usuelle par changement de variable
- On pose

$$X = x + d \rightarrow dX = dx$$

- On a alors

$$-\frac{1}{a}.\int \frac{dx}{\zeta^2 - (x+d)^2} = -\frac{1}{a}\int \frac{dX}{\zeta^2 - X^2} = -\frac{1}{2a\zeta}\ln\left|\frac{\zeta + X}{\zeta - X}\right| + C = -\frac{1}{2a\zeta}\ln\left|\frac{\zeta + x + d}{\zeta - x - d}\right| + C$$

Cas particuliers

- Si $f>0$, on pose

$$f=\zeta^2$$

- On a alors

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x+d)^2+\zeta^2$$

- Il vient

$$\frac{1}{a}\int\frac{dx}{(x+d)^2+\zeta^2}=\frac{1}{a}\int\frac{dX}{X^2+\zeta^2}=\frac{1}{a\zeta}\arctan\frac{X}{\zeta}+C=\frac{1}{a\zeta}\arctan\frac{x+d}{\zeta}+C$$

Exemples

$$\int \frac{dx}{2x^2+5x+1}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

Intégration

Intégration des fractions rationnelles

- Soit $A(x)$ et $B(x)$ deux polynômes de variable réelle à coefficients réels
- On veut calculer

$$\int \frac{A(x)}{B(x)}\,dx$$

- Si le deg(A)>deg(B), on effectue la division polynomiale et on obtient

$$\frac{A(x)}{B(x)} = P(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

- avec P polynôme de deg(P)=deg(A)-deg(B)
- $R(x)$ est le reste, un polynôme de deg(R)<deg(B)

Intégration

Intégration des fractions rationnelles

- On a alors

$$\int \frac{A(x)}{B(x)}dx = \int P(x)dx + \int \frac{R(x)}{B(x)}dx$$

- Dans le cas où deg(A)<deg(B), la fraction est irréductible

Intégration

Décomposition en éléments simples

- Dans le cas où la fraction est irréductible, on doit effectuer une décomposition en éléments simple de la fraction
- Toute fraction peut se mettre sous la forme
  - d'éléments simples de première espèce ($\lambda \in R, a \in R$, $n \in N^*$) avec a pôle de multiplicité n

$$\frac{\lambda}{(x-a)^n}$$

  - d'éléments simples de seconde espèce

$$\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)}$$

- avec $b^2-4ac<0$ (le dénominateur n'est pas factorisable sur R)

Intégration

Décomposition en éléments simples

- La fraction rationnelle est alors décomposée en éléments simples

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \sum_{i=1}^{i=m}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\lambda_k}{(x-a_i)^k} + \sum_{j=1}^{j=p}\sum_{l=1}^{l=q}\frac{\alpha_l x+\beta_l}{\left(a_j x^2+b_j x+c_j\right)^l}$$

- Exemple direct

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{2x^2+3}{(x+1)^2(x-2)\left(x^2+x+1\right)^2}$$

$$= \frac{\lambda_1}{(x+1)} + \frac{\lambda_2}{(x+1)^2} + \frac{\lambda_3}{(x\_2)} + \frac{\alpha_1 x+\beta_1}{x^2+x+1} + \frac{\alpha_2 x+\beta_2}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

Intégration

Décomposition en éléments simples

- Il faut donc calculer les coefficients λ_i, α_j et β_j
- Oui, mais comment ?

Éléments de première espèce

- Première technique : on met au même dénominateur et on identifie les coefficients par égalisation

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{x+1}{x(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2}$$

$$\begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{2}{3} \\ c = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

- Et on intègre membre à membre

Intégration

Décomposition en éléments simples - Éléments de première espèce

• Deuxième technique : On multiplie par les zéros du dénominateurs et on fait tendre à la limite

$$\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{x+1}{x(x-1)(x+2)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+2}$$

$$\lim_{x\to 0} x\times\frac{x+1}{x(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 0} x\times\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+2}\right)\to\frac{1}{-2}=a$$

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\times\frac{x+1}{x(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}(x-1)\times\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+2}\right)\to\frac{2}{3}=b$$

$$\lim_{x\to -2}(x+2)\times\frac{x+1}{x(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to -2}(x+1)\times\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+2}\right)\to\frac{-1}{6}=c$$

• Et on intègre membre à membre

Intégration

Décomposition en éléments simples - Éléments de première espèce

- Remplaçons les valeurs déjà identifiées

$$\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{2\left(x^3+5\right)}{x^3\left(x+1\right)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x^3}+\frac{c}{x^2}+\frac{d}{x}$$

- On utilise la technique N°2

$$\lim_{x\to 0} x^3\times\frac{2\left(x^3+5\right)}{x^3\left(x+1\right)}=\lim_{x\to 0} x^3\times\left(\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x^3}+\frac{c}{x^2}+\frac{d}{x}\right)\to 10=b$$

$$\lim_{x\to -1} \left(x+1\right)\times\frac{2\left(x^3+5\right)}{x^3\left(x+1\right)}=\lim_{x\to -1} \left(x+1\right)\times\left(\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x^3}+\frac{c}{x^2}+\frac{d}{x}\right)\to -8=a$$

- Oui, mais comment identifier c et d ?

Intégration

Décomposition en éléments simples – Éléments de première espèce

•Cas où il y a des pôles (zéros) réels multiples

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{2\left(x^3+5\right)}{x^3\left(x+1\right)} = \frac{-8}{x+1} + \frac{10}{x^3} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x}$$

• Essayons de multiplier par x^2

$$\lim_{x\to 0} x^2 \times \frac{2\left(x^3+5\right)}{x^3\left(x+1\right)} = \lim_{x\to 0} x^2 \times \left(\frac{-8}{x+1} + \frac{10}{x^3} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\left(x^3+5\right)}{x\left(x+1\right)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{-8x^2}{x+1} + \frac{10}{x} + c + dx\right)$$

Termes infinis

Intégration

Décomposition en éléments simples - Éléments de première espèce

- Oui, mais regroupons les termes divergent

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{2\left(x^3+5\right)}{x\left(x+1\right)}-\frac{10}{x}\right\}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\left(x^3+5\right)-10\left(x+1\right)}{x\left(x+1\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x\left(x^2-5\right)}{x\left(x+1\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\left(x^2-5\right)}{\left(x+1\right)}\right)$$

$$=-10$$

- On a alors

$$-10=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-8x^2}{x+1}+c+dx\right)\to c=-10$$

Intégration

Décomposition en éléments simples - Éléments de première espèce

- On remplace alors la valeur de c par sa valeur et on multiplie à présent par x

$$\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{2\left(x^3+5\right)}{x^3\left(x+1\right)}=\frac{-8}{x+1}+\frac{10}{x^3}+\frac{-10}{x^2}+\frac{d}{x}$$

- Et passons à la limite à 0 et regroupons les termes divergents

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{2\left(x^3+5\right)}{x^2\left(x+1\right)}-\frac{10}{x^2}+\frac{10}{x}\right\}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\left(x^3+5\right)-10\left(x+1\right)+10x\left(x+1\right)}{x^2\left(x+1\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x^2\left(x+5\right)}{x^2\left(x+1\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\left(x+5\right)}{\left(x+1\right)}\right)$$

$$=10$$

S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Intégration

Décomposition en éléments simples - Éléments de première espèce

• De plus, on a

$$\lim_{x \to 0} \left\{ \frac{-8x^2}{x+1} + d \right\} = d \to d = 10$$

• On obtient alors

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{2\left(x^3+5\right)}{x^3\left(x+1\right)} = \frac{-8}{x+1} + \frac{10}{x^3} + \frac{-10}{x^2} + \frac{10}{x}$$

• Cette technique est systématique

• Néanmoins, il faut être rigoureux et le calcul des élément simples doit être fait dans l'ordre correct, comme dans l'exemple suivant

• Il faut calculer d'abord les éléments simples qui ont au dénominateur le zéro multiple d'ordre le plus élevé puis on descend dans les ordres

Intégration

Décomposition en éléments simples - Éléments de seconde espèce

- La plus simple des méthodes (mais aussi la plus fastidieuse) consiste à donner des valeurs arbitraires à la fonction et d'identifier les termes
- Exemple

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{1}{x(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

- Le trinôme du second degré n'est pas factorisable sur *R*
- Identifions les termes associés aux éléments de premières espèces
- Les 2 pôles de ces termes sont x=0 et x=-1
- Calculons *A*

$$\lim_{x\to 0} xF(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 0}\left(A + \frac{Bx}{x+1} + \frac{(Cx+D)x}{x^2+x+1} \right) \to A = 1$$

Intégration

Décomposition en éléments simples - Éléments de seconde espèce

• Calculons B

$$\lim_{x\to -1}(x+1)F(x)=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x\left(x^2+x+1\right)}=B\to B=-1$$

• Il nous reste à identifier C et D

• La première méthode consiste donc à choisir des valeurs arbitraires (mais pas égales aux pôles de la fraction rationnelle) et d'identifier

• Prenons $x=1$

$$\frac{A(1)}{B(1)}=\frac{1}{1(1+1)\left(1^2+1+1\right)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{1+1}+\frac{C+D}{1^2+1+1}$$

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{C+D}{3}\to C+D=-1$$

Intégration

Décomposition en éléments simples – Éléments de seconde espèce

- Puis x=2

$$\frac{A(2)}{B(2)}=\frac{1}{2(2+1)(2^2+2+1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2+1}+\frac{2C+D}{2^2+2+1}$$

$$\frac{1}{42}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2C+D}{7}\rightarrow 2C+D=-\frac{3}{2}$$

- On obtient alors un système de deux équations à deux inconnues (C et D)

$$\begin{cases}C+D=-1\\2C+D=-1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}C=0\\D=1\end{cases}$$

- Donc

$$\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{1}{x(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

Intégration

Décomposition en éléments simples - Éléments de seconde espèce

- Autre méthode : décomposition sur C
- Occupons nous du terme du second ordre

$$x^2 + x + 1 = 0$$

- Trouvons les racines de ce trinôme

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 = 3j^2 < 0$$

- Les racines sont donc complexes et valent

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-1 - j\sqrt{3}}{2} \\ x_2 = \bar{x}_1 = \dfrac{-1 + j\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Intégration

Décomposition en éléments simples - Éléments de seconde espèce

• La décomposition en élément simple sur $\mathbb{C}$ donne alors uniquement des éléments simples de première espèce

$$\frac{Cx+D}{x^2+x+1}=\frac{\alpha}{x-x_1}+\frac{\beta}{x-\bar{x}_1}$$

• Il suffit donc d'appliquer les méthodes sur les éléments simples sur $\mathbb{C}$

$$\frac{Cx+D}{x^2+x+1}=\frac{Cx+D}{(x-x_1)(x-\bar{x}_1)}=\frac{\alpha}{x-x_1}+\frac{\beta}{x-\bar{x}_1}$$

• On rappelle

$$\{x_1-\bar{x}_1=a+jb-(a-jb)=2jb\}$$

S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Intégration

Décomposition en éléments simples - Éléments de seconde espèce

- Donc par applications de la méthode, recherchons α

$$\lim_{x\to x_1}(x-x_1)F(x)=\lim_{x\to x_1}\frac{1}{x(x+1)(x-\bar{x}_1)}=\alpha$$

- Donc par association

$$x_1(x_1+1)(x_1-\bar{x}_1)=\left(\frac{1+j\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-1-j\sqrt{3}}{2}+1\right)\left(j\sqrt{3}\right)$$

$$=j\sqrt{3}\left(\frac{1+j\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1-j\sqrt{3}}{2}\right)=j\frac{\sqrt{3}}{4}(1+3)$$

$$=j\sqrt{3}$$

Intégration

Décomposition en éléments simples - Éléments de seconde espèce

- De la même manière, on obtient

$$\lim_{x\to\bar{x}_1}(x-\bar{x}_1)F(x)=\lim_{x\to\bar{x}_1}\frac{1}{x(x+1)(x-x_1)}=\beta=-\frac{1}{j\sqrt{3}}=\frac{j}{\sqrt{3}}$$

- Pour trouver la décomposition sur *R*, il nous reste à mettre au même dénominateur

$$\frac{\alpha}{x-x_1}+\frac{\beta}{x-\bar{x}_1}=\frac{j}{\sqrt{3}}\left(\frac{x-\bar{x}_1-x+x_1}{x^2+x+1}\right)=\frac{j}{\sqrt{3}}\left(\frac{x_1-\bar{x}_1}{x^2+x+1}\right)$$

$$=\frac{j}{\sqrt{3}}\left(\frac{-j\sqrt{3}}{x^2+x+1}\right)=\frac{1}{x^2+x+1}$$

Intégration

Décomposition en éléments simples - Éléments de seconde espèce

- Cette méthode peut paraître plus difficile que la méthode par substitution de valeurs
- Néanmoins, dans le cas de pôles multiples, c'est la plus facile et la plus répétitive
- En effet, il faudra alors choisir un nombre conséquent de valeurs par la méthode de substitution
- Ce qui amène à beaucoup trop de calculs … souvent faux

Intégration
Intégrales généralisées

• Auparavant, nous avons défini l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

• En utilisant le théorème :

- Si f est une fonction continue sur [a,b] alors f est une fonction intégrable sur cette intervalle

• Dans la suite, nous allons étendre la notion d'intégrale à des fonctions définies sur un intervalle I qui n'est pas forcément fermé (on dit intervalle compact : intervalle ouvert ou semi-ouvert)

• On étendra aussi ces résultats à des fonctions non bornées sur I ou es intervalles non bornés

• On parle alors d'intégrales généralisées ou d'intégrales impropres

Intégration
Exemples

• Intégrale impropre avec une borne infinie

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

• La fonction présente une discontinuité en un point (ici en x=0)

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$$

• On rappelle qu'au voisinage de *0* la fonction admet l'équivalent suivant (dl)

$$\frac{\sin x}{x^2} = \frac{\sin x}{x}\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$$

Intégration

Intégrale d'une fonction non bornée - Définition

- Soit *f* une fonction définie non bornée sur un intervalle semi-ouvert [a,b[
- Si la limite suivante existe

$$\lim_{X \to b} \int_a^X f(t)dt$$

- et que cette limite est un nombre réel **fini**, alors on dit que *f* est intégrable sur [a,b[et on note

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{X \to b} \int_a^X f(t)dt$$

Intégration

Intégrale d'une fonction non bornée - Définition

- Si f est non bornée au point c appartenant à l'intervalle]a,b[, on étudie
- Si la limite suivante existe

$$\lim_{X \to c} \int_a^X f(t)dt \quad \text{et} \quad \lim_{X \to c} \int_X^b f(t)dt$$

Intégration

Intégrale d'une fonction non bornée - Exemple

• Soit la fonction f définie dans]-a,a[, avec a>0 telle que

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

• Soit un intervalle $[\alpha,\beta]\subset]-a,a[$, en utilisant la définition de l'intégrale, nous pouvons écrire

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{\beta}{a} - \arcsin\frac{\alpha}{a}$$

Intégration

Intégrale d'une fonction non bornée - Exemple

• Par contre, pour calculer

$$\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

• Nous devons passer par une valeur intermédiaire et par utilisation du théorème de Chasles

$$\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int_{-a}^{0} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \int_{0}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= \left[\frac{1}{a}\arcsin\frac{x}{a}\right]_{-a}^{0} + \left[\frac{1}{a}\arcsin\frac{x}{a}\right]_{a}^{0} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Intégration

Intégrale d'une fonction non bornée - Remarques

- La méthode présentée dans l'exemple précédent est utilisable quand on sait calculer une primitive
- Dans certains calculs, seule la convergence de l'intégrale nous intéressera
- Il n'est pas alors nécessaire de chercher la primitive (surtout si elle st compliquée)
- Quand les intégrales sont convergentes, on peut appliquer la relation de Chasles

Intégration

Intégrale généralisée – Critères de convergence

• Si f est une fonction définie, positive, non bornée sur I=[a,b[et intégrable dans tout domaine compact [a,x]$\subset I$ alors l'intégrale

$$\int_a^b f(t)dt$$

Existe **si et seulement si**

$$\int_a^x f(t)dt$$

Est majorée sur I

Intégration

Intégrale généralisée – Critères de convergence

- Soient f et g des fonctions positives, définies dans [a,b[telles que

$$f \leq g$$

Alors, si

$$\int_a^b g(t)dt \text{ converge} \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \text{ converge}$$

$$\int_a^b f(t)dt \text{ diverge} \Rightarrow \int_a^b g(t)dt \text{ diverge}$$

S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Intégration

Intégrale généralisée – Exemple

• Montrons la convergence de l'intégrale suivante

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

Il suffit de se rappeler que sur l'intervalle d'intégration

$$x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq x \Rightarrow -x^2 \leq x \Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x}$$

Or la fonction e^{-x} est intégrable et convergente sur cet intervalle

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx \ \text{ converge} \Rightarrow \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \ \text{ converge}$$

Intégration

Intégrale généralisée – Convergence absolue

• Si l'intégrale suivante est convergente

$$\int_a^b |f(t)|dt$$

Alors

$$\int_a^b f(t)dt$$

Est elle aussi convergente

• **Attention, la réciproque est fausse**

Intégration

Intégrale généralisée – Exemple

- Montrons la convergence de l'intégrale généralisée suivante

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

On montre aisément que

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

donc

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$$

Il vient que l'intégrale est absolument convergente

Intégration

Fonction intégrable sur un intervalle non bornée

• Nous allons étudier les intégrales de la forme

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt$$

• Pour montrer que *f* est intégrable sur [a,+∞[, il faut démontrer que

$$\lim_{X \to +\infty} \int_a^{X} f(t)dt$$

Existe, i.e.

$$\lim_{X \to +\infty} \int_a^{X} f(t)dt = \int_a^{+\infty} f(t)dt = l \in R$$

Intégration

Fonction intégrable sur un intervalle non bornée

• Dans le cas où a=-∞

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$$

• Pour montrer que *f* est intégrable sur [- ∞,+∞[, il faut démontrer que

$$\int_{-\infty}^{a} f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_{a}^{+\infty} f(t)dt$$

Existent, i.e.

$$\lim_{X \to -\infty} \int_{X}^{a} f(t)dt \quad \text{et} \quad \lim_{X \to +\infty} \int_{a}^{X} f(t)dt$$

Existent

Intégration
Exemple

- Cas de l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

Intégration

Critère de convergence – Critère de Cauchy

• La condition nécessaire et suffisante de convergence d'une intégrale « généralisée » est aussi appelée critère de Cauchy.

Théorèmes fondamentaux de convergence

• Critère de convergence sur [a,b[avec *b* fini

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^m}$$

• Si $m<1$ alors l'intégrale est convergente

• Si $m\geq 1$ alors l'intégrale est divergente

Intégration

Théorèmes fondamentaux de convergence

- Soit *f* une fonction définie sur [a,b[
- Si

$$f(x) > \frac{A}{(b-x)^m} \quad \text{avec } m \geq 1 \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \quad \text{est divergente}$$

- Si

$$f(x) < \frac{A}{(b-x)^m} \quad \text{avec } m < 1 \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \quad \text{est convergente}$$

Intégration

Théorèmes fondamentaux de convergence

- Critère de Riemann sur $[a,+\infty[$ avec $a>0$

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^m}$$ est convergente si $m>1$

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^m}$$ est divergente si $m\leq 1$

Intégration

Théorèmes fondamentaux de convergence

- Soit f une fonction strictement positive et A un réel strictement positif
- Si

$f(x) < \dfrac{A}{x^m}$ avec $m>1$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente

- Si

$f(x) > \dfrac{A}{x^m}$ avec $m\leq 1$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est divergente

Intégration

Théorèmes fondamentaux de convergence – Principe d'équivalence

- Si

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{au voisinage de } b \quad \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \sim \int_a^b g(x)dx$$

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{au voisinage de } \infty \quad \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx \sim \int_a^\infty g(x)dx$$

- Les intégrales sont de mêmes natures. Elles sont soit convergentes, soit divergentes

$$f(x) \sim \frac{A}{(b-x)^m} \quad \text{au voisinage de } b \longrightarrow \text{Voir précédemment}$$

$$f(x) \sim \frac{A}{x^m} \quad \text{au voisinage de } \infty \longrightarrow \text{Voir précédemment}$$

Équations différentielles

Introduction

- Les équations différentielles sont présentes partout en sciences
- La théorie mathématique des équations différentielles fait appel à des notions élaborées
- Toutes les équations différentielles ne trouvent pas forcément de solutions analytiques
- Il existe alors des techniques de recherches de solutions approchées par des méthodes numériques (analyse numérique : utilisation de l'outil informatique)
- L'analyse numérique est au programme de Licence et Master -> donc pas pour nous
- On se contentera d'étudier les équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition

• On appelle **équation différentielle**, toute équation contenant une fonction inconnue *y*, ses dérivées

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

Et des variables indépendantes

Exemples : Oscillation d'une masse *m* « attachée » à un ressort *k*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

x : déplacement longitudinal du ressort

Circuit électromagnétique oscillant avec inductance L, capacité *C* (Condensateur), une résistance *R* sous une tension extérieure *U*

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = U(t)$$

i : intensité du courant électrique

Définitions

• On appelle **équation différentielle ordinaire**, toute équation différentielle dont la fonction inconnue *y* ne dépend que d'***une*** variable indépendante : $y = f(x)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

• On appelle **équation différentielle aux dérivées partielles (ou équation aux dérivées partielles),** toute équation différentielle dont la fonction inconnue *y* dépend de plusieurs variables

• Exemple : Équation d'ondes (équation des cordes vibrantes) avec u= u(x,y,z,t)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

u : propagation (déplacement) d'une onde

c : célérité de l'onde (vitesse de propagation)

x,y,z : coordonnées spatiales

t : variable temporelle

S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Définitions

• **Toute fonction** y=f(x) satisfaisant l'équation différentielle

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

est **solution** de l'équation différentielle

Ordre d'une équation différentielle

• L'ordre d'une équation différentielle est donné par le **plus grand ordre** des dérivées de *y*

• Exemples : équation différentielle du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} + ay = \sin x$$

Équation différentielle du troisième ordre

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + a\frac{dy}{dx} + by(x) = \tan x$$

Degré d'une équation différentielle

• le degré d'une équation différentielle est donné par **le degré de la plus grande puissance de la fonction inconnue ou de ses dérivées**

• Exemple : équation différentielle du troisième degré (du second ordre)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y^3 + xy = 0$$

Intégration de l'équation différentielle

• Préliminaire : savoir intégrer les fonctions usuelles et connaître les techniques d'intégration usuelles (Cf. Cours de 1ère année sur l'intégration)

• l'intégration d'une équation différentielle consiste en la détermination de la solution de l'équation différentielle

• On dit alors **intégrer l'équation différentielle**

• Le but de ce cours est de vous donner les outils pour résoudre ces problèmes, i.e. intégrer les équations différentielles

• Cet outil est indispensable pour un scientifique et donc pour vous

• Surtout si vous voulez poursuivre … sinon il sera utile pour le partiel

Problème aux valeurs initiales

- On cherche **une** solution d'une équation différentielle d'ordre *n* dépendante du temps
- On doit alors définir *n* conditions initiales
- Exemple : Parachutiste « largué » à une hauteur *h* avec une vitesse v_0

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g$$

- *C'est une équation différentielle du second ordre en temps, il est donc nécessaire d'introduire 2* conditions initiales associées à *x* ou ses dérivées

$$x_0 = h \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = v_0$$

S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr

Problème aux limites

• On cherche **une** solution d'une équation différentielle d'ordre *n* dépendante de l'espace

• On doit alors définir autant de conditions aux limites que l'ordre de l'équation différentielle

• Exemple : Équation de Laplace (potentiel électrostatique sans charges extérieures) définie dans l'espace

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

• Il y a besoin de 2 conditions selon x, 2 conditions selon y et 2 conditions selon z

• Soit 3*2 = 6 conditions aux limites pour ce problèmes associées à φ en x,y,z

Problème aux limites et valeurs initiales

- On cherche **une** solution d'une équation différentielle d'ordre *n* dépendante de l'espace et d'ordre *m* en temps
- On doit alors définir autant de conditions aux limites et initiales que l'ordre de l'équation différentielle respectivement en espace et en temps
- Exemple : Équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

- Il y a besoin de 2 conditions selon *x*, 2 conditions selon *y* et 2 conditions selon *z*
- Il y a besoin de 2 conditions initiales (ordre en $t = 2$)
- Soit 3*2 = 6 conditions aux limites pour ce problèmes et 2 conditions initiales

Équations différentielles du premier ordre

Équations différentielles à variables séparables

• Une équation différentielle du premier ordre à variables séparables (ou à variables séparées) est une équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \phi(y) \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{\phi(y)}$$

• Les variables sont séparées de chaque côté de l'égalité

• Exemple pour la première forme

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \Leftrightarrow dy = f(x)dx$$

$$y = \int f(x)dx + k$$

$$\boxed{y = y_0 + \int f(x)dx}$$

Équations différentielles du premier ordre

Équations différentielles à variables séparables

- Exemple pour la second forme

$$\frac{dy}{dx} = \phi(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{\phi(y)} = dx$$

$$\boxed{x = x_0 + \int \frac{dy}{\phi(y)}}$$

- Ce cas est très présent en physique
- Irradiation, refroidissement …
- Prenons le cas où $\phi(y)=-y$

Équations différentielles du premier ordre

Équations différentielles à variables séparables

• Exemple pour la troisième forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{\phi(y)} \Leftrightarrow \phi(y)dy = f(x)dx$$

$$\boxed{\int \phi(y)dy = \int f(x)dx + k}$$

• Prenons le cas où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x+2}$$

• On voit dans ces exemples qu'il est nécessaire d'introduire 1 condition à la limite (si espace) ou initiale (si temps) : pour une équation différentielle d'ordre 1 -> 1 CL ou 1 CI

Équations différentielles du premier ordre

Méthodes générales

• Une équation différentielle linéaires du 1ère ordre sont des équations de la forme

$$a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=c(x)$$

Conditions initiales – Problème de Cauchy

• Il existe une solution unique de l'équation différentielle satisfaisant la condition initiale (ou limite)

$$y(x_0)=y_0$$

• On dit alors que trouver cette solution, c'est résoudre le problème de Cauchy relatif aux conditions initiales

Équations différentielles du premier ordre

Méthode de résolution de Lagrange

• On appelle équation complète, l'expression suivante

$$a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=c(x)$$

• On appelle équation homogène associée (ou équation sans second membre :ESSM) , l'expression

$$a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=0$$

• On l'appelle aussi équation de Lagrange associée à l'équation différentielle linéaire du premier ordre

Équations différentielles du premier ordre

Théorème fondamentale

- La solution générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre est la somme d'une solution particulière de l'équation complète et d'une solution de l'équation sans second membre.

$$y = y_{SSM} + y_{PART}$$

- Le premier terme (SSM) est la solution sans second membre
- Le second terme (PART) est la solution particulière

Équations différentielles du premier ordre

Résolution de l'équation sans second membre (ou équation homogène)

• Résoudre l 'équation différentielle sans second membre revient à résoudre une équation différentielle à variables séparables

$$a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=0$$

$$\frac{dy}{y}=-\frac{b(x)}{a(x)}dx$$

• Intégrons membre à membre

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx$$

• Il vient

$$y=ke^{f(x)} \quad \text{avec} \quad f(x)=-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx$$

Équations différentielles du premier ordre

Résolution de l'équation complète

- Pour trouver une solution particulière de l'équation différentielle complète, la méthode est la suivante
  - Recherche d'une solution évidente
  - Recherche par la méthode de « variation de la constante » ou méthode de Lagrange

Équations différentielles du premier ordre

Méthode de la variation de la constante

- La technique permet de résoudre ensuite une équation différentielle à variables séparées
- Remarques importantes :
  - Avant d'utiliser cette technique, essayer de « voir » une solution « évidente », du type constante, ou bien polynôme, ou fonction simple
  - Pour trouver une « solution évidente », on est souvent guidé par la valeur du second membre

Équations différentielles du premier ordre

Méthode de la variation de la constante

• Prenons un exemple, intégrer l'équation différentielle du premier ordre suivante

$$x\frac{dy}{dx} - y = x^2 \cos x$$

• Résolution de l'équation sans second membre

$$x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

$$xdy = ydx \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{\lambda}\right| = \ln|x| \Rightarrow y = \lambda x$$

• La solution sans second membre est donc

$$y = \lambda x \qquad\qquad \lambda \in R$$

Équations différentielles du premier ordre

Méthode de la variation de la constante

• Recherche d'une solution particulière par la méthode de la variation de la constante

$$x\frac{dy}{dx} - y = x^2 \cos x$$

• Remplaçons *y* par la solution sans second membre en considérant que la constante est maintenant une fonction de la variable *x*

$$x\frac{d}{dx}(\lambda(x)x) - \lambda(x)x = x^2 \cos x$$

$$x\left(\frac{d\lambda}{dx}x + \lambda\frac{dx}{dx}\right) - \lambda x = x^2 \cos x$$

$$x^2\frac{d\lambda}{dx} = x^2 \cos x \Rightarrow \frac{d\lambda}{dx} = \cos x \Rightarrow \lambda(x) = \int \cos x dx = \sin x + C$$

• La solution particulière est donc

$$y_{PART} = \lambda x = x(\sin x + C) \qquad C \in R$$

Équations différentielles du premier ordre

Solution générale

• Par application du théorème fondamentale, la solution générale est donnée par

$$y = y_{SSM} + y_{PART} = kx + x(\sin x + C) = Ax + x\sin x \qquad A \in R$$

• En TD, nous verrons d'autres équations différentielles du premier ordre particulières : Bernoulli, Ricatti

Équations différentielles du premier ordre

Cas où le second membre est une somme de fonctions

• Si le second membre est une somme de *n* fonctions indépendantes, on doit alors résoudre *n* fois l'équation différentielle avec second membre en considérant les *n* fonctions les unes après les autres

S. Thibaud – IUT de Chimie – 1ère année – sebastien.thibaud@univ-fcomte.fr